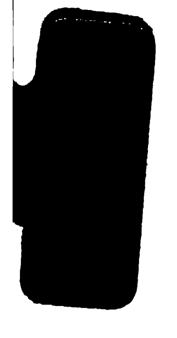
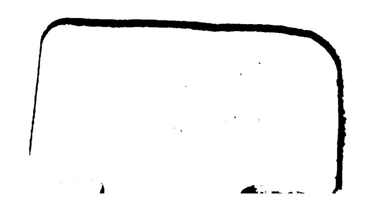










Lie, Sophus, Prof. der Geometrie an der Universität Leipzig, Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von Sophus Lie und G. Scheffers. In 2 Bänden. I. Band. Mit Figuren im Text. [XII u. 694 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 24.—
[Der II. Band erscheint Ende d. J.]

Neumann, Dr. Carl, ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Zweite, vollständig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und einer lithographierten Tafel. [XIV u. 472 S.] gr. 8. 1884. geh. n. *M* 12.—

Pasch, Dr. Moritz, Professor an der Universität zu Gießen, Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VII u. 188 S.] Mit Figuren im Text. gr. 8. 1882. geh. n. *M* 3.20.

Pockels, Friedrich, über die partielle Differentialgleichung, $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Mit Figuren im Text. [XII u. 339 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M* 8.—

Schlesinger, Prof. Dr. Ludwig, Privatdozent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. I. Band. [XX u. 487 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 16.—

——— ——— II. Band. I. Theil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M* 18.—

——— ——— II. Band. II. Theil. Mit Figuren im Text. gr. 8. 1898. geh. [Unter der Presse.]

Schlömilch, Dr. Oscar, Kgl. Sächs. Geheimer Rath (vorher Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Dresden), Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Mit Holzschnitten im Text. Zwei Theile. gr. 8. geh. n. *M* 13.60.

I. Theil. Aufgaben aus der Differentialrechnung. 4. Aufl. [VIII u. 386 S.] 1887. n. *M* 6.—

II. — Aufgaben aus der Integralrechnung. 3. Aufl. [VIII u. 384 S.] 1882. n. *M* 7.60.

Serret, J.-A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack, Dr. und Professor am Polytechnikum zu Dresden. Zwei Bände. Mit in den Text gedruckten Figuren. gr. 8. geh. n. *M* 24.40.

I. Band. Differentialrechnung. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. Mit 85 in den Text gedr. Figuren. [XVI u. 570 S.] 1897. n. *M* 10.—

II. — 1. Hälfte: Integralrechnung. [VIII u. 380 S.] 1885. n. *M* 7.20.

II. — 2. — Differentialgleichungen. [VI u. 388 S.] 1885. n. *M* 7.20.

Stolz, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. gr. 8. geh. n. *M* 16.—

I. Theil. Reelle Veränderliche und Functionen. Mit 4 Figuren im Text. [X u. 460 S.] 1893. n. *M* 8.—

II. — Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] 1896. n. *M* 8.—

VORLESUNGEN

ÜBER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

VON

EMANUEL CZUBER,

O. Ö. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN.

ZWEITER BAND.

MIT 78 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1898.

Inhaltsverzeichnis.

Zweiter Theil.

Integral-Rechnung.

Erster Abschnitt.

Grundlagen der Integral-Rechnung.

§ 1. Das bestimmte und das unbestimmte Integral.

§ 2. Grundformeln und -Methoden der Integral-Rechnung.

Zweiter Abschnitt.

Unbestimmte Integrale.

§ 1. Integration rationaler Functionen.

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Integral-Rechnung.

§ 1. Quadratur ebener Curven.

§ 2. Rectification von Curven.

§ 3. Cubatur krummer Flächen.

§ 4. Quadratur krummer Flächen.

§ 5. Massenanziehung und Potential.

Fünfter Abschnitt.

Differentialgleichungen.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

§ 1. Differentialgleichungen erster Ordnung. Allgemeines.

§ 2. Integrationsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 3. Singuläre Lösungen.

§ 4. Geometrische Anwendungen.

§ 5. Simultane Differentialgleichungen.

§ 6. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

§ 7. Lineare Differentialgleichungen.

§ 8. Integration durch Reihen.

§ 9. Variationsrechnung.

B. Partielle Differentialgleichungen.

§ 1. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 2. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Zweiter Theil.

Integral-Rechnung.

Erster Abschnitt.

Grundlagen der Integral-Rechnung.

§ 1. Das bestimmte und das unbestimmte Integral.

212. Die Grundaufgabe der Differential-Rechnung besteht darin, zu einer in dem Intervalle (α, β) eindeutig definirten stetigen Function $F(x)$ den Differentialquotienten, d. i. den Grenzwert

$$(1) \qquad \lim_{h=\pm 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

für ein unbestimmtes x aus (α, β) anzugeben.

Aus der Umkehrung dieser Aufgabe entspringt die neue: Es ist eine Function $F(x)$ so zu bestimmen, dass ihr Differentialquotient für jedes x aus dem Intervalle (α, β) durch den zugehörigen Wert der für dieses Intervall gegebenen eindeutigen Function $f(x)$ dargestellt werde, dass sie also der Gleichung genüge

$$(2) \qquad \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Hiermit ist das *Grundproblem der Integral-Rechnung* ausgesprochen.

Wenn eine Function von dieser Beschaffenheit existirt, so muss sie nothwendig eindeutig und stetig sein in dem Intervalle (α, β), weil nur einer solchen Function an jeder Stelle ein bestimmter Differentialquotient in dem durch das Symbol (1) bezeichneten Sinne zukommt (**20**).

Die Existenz einer Function, welche der Gleichung (2)

genügt, vorausgesetzt, kann man mit den Hilfsmitteln der Differential-Rechnung zu einer *formalen* Lösung der durch (2) gestellten Aufgabe wie folgt gelangen.

Es seien a, x zwei von einander verschiedene Zahlen aus dem Bereiche (α, β). Man theile das Intervall (a, x) durch Einschaltung von $n-1$ Zwischenwerten $x_2, x_4, \ldots x_{2n-2}$ in n kleinere Intervalle $(a, x_2), (x_2, x_4), \ldots (x_{2n-2}, x)$; um eine bestimmte Vorstellung zu haben, denke man sich die Zahlenreihe

$$(3) \qquad a = x_0, \quad x_2, \quad x_4, \ldots x_{2n-2}, \; x_{2n} = x$$

steigend.

Nach dem Mittelwertsatze (37) gibt es in dem Intervalle

$$(x_{2\varkappa-2},\ x_{2\varkappa}),$$

welches wir als das $\varkappa$-te bezeichnen, einen Zwischenwert $\xi_{2\varkappa-1}$ derart, dass

$$(4) \qquad F(x_{2\varkappa}) - F(x_{2\varkappa-2}) = (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(\xi_{2\varkappa-1}).$$

Setzt man hierin nach und nach $\varkappa = 1, 2, \ldots n-1$, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
F(x_2) - F(a) \quad &= (x_2 - a) f(\xi_1) \\
F(x_4) - F(x_2) \quad &= (x_4 - x_2) f(\xi_3) \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
F(x) - F(x_{2n-2}) &= (x - x_{2n-2}) f(\xi_{2n-1}),
\end{aligned}$$

und durch dessen Summirung die Gleichung

$$(5) \begin{cases} F(x) - F(a) = (x_2 - a) f(\xi_1) + (x_4 - x_2) f(\xi_2) + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + (x - x_{2n-2}) f(\xi_{2n-1}) \\ \qquad = \sum\limits_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(\xi_{2\varkappa-1}). \end{cases}$$

Durch diese Gleichung ist die Änderung, welche die zu bestimmende Function bei dem Übergange von a zu x erfährt, ausgedrückt und zwar in Werten der gegebenen Function. Wird also der Wert $F(a)$ angenommen, so ist der Wert $F(x)$ selbst bestimmt.

Die Gleichung (5) besteht zurecht, nach welchem Gesetze auch die Wertreihe (3) fortschreitet und wie gross die Anzahl n der Theilintervalle sein mag. Sie stellt aber nur eine *formale* und nicht eine *praktische* Lösung der Aufgabe dar, weil

die Ausführung der auf der rechten Seite vorgeschriebenen Summation an der Unkenntnis der Zwischenwerte $\xi_1, \xi_3, \ldots \xi_{2n-1}$ scheitert; denn diese Zwischenwerte sind ausser von den Theilintervallen auch von der Natur der erst zu bestimmenden Function $F(x)$ abhängig.

Zu einer wirklichen Lösung werden die Untersuchungen des nächsten Artikels führen.

213. *Ist die gegebene Function $f(x)$ in dem Intervalle (α, β) eindeutig und stetig; wird das in (α, β) enthaltene Intervall (a, b) durch die Wertreihe*

$$(6) \qquad a = x_0, \quad x_2, \quad x_4, \ldots x_{2n-2}, \; x_{2n} = b$$

in n kleinere Intervalle zerlegt und aus jedem Theilintervalle $(x_{2\varkappa-2}, x_{2\varkappa})$ ein beliebiger Wert $x_{2\varkappa-1}$ herausgehoben; so convergirt die mit diesen Werten gebildete Summe

$$(7) \quad \begin{cases} \mathrm{S} = (x_2 - a)f(x_1) + (x_4 - x_2)f(x_3) + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad + (b - x_{2n-2})f(x_{2n-1}) \\ \quad = \sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2})\, f(x_{2\varkappa-1}) \end{cases}$$

bei beständig wachsendem n und Abnahme aller Theilintervalle gegen Null nach einer bestimmten Grenze.

Der Beweis dieses grundlegenden Satzes ergibt sich aus folgenden Schlüssen.

1) Es sei $m_{2\varkappa-1}$ der kleinste, $M_{2\varkappa-1}$ der grösste Wert, den die Function $f(x)$ in dem Intervalle $(x_{2\varkappa-2}, x_{2\varkappa})$ annimmt.

Setzt man in der Summe S an Stelle der Functionswerte $f(x_1), f(x_3) \ldots f(x_{2n-1})$ die kleinsten Werte $m_1, m_3, \ldots m_{2n-1}$ aus den betreffenden Intervallen, so entsteht eine neue Summe

$$(8) \qquad \mathrm{S}_1 = \sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-1}) m_{2\varkappa-1},$$

welche kleiner ist als die Summe S, weil ihre Summanden im allgemeinen kleiner sind als die entsprechenden von S.

Ersetzt man in S die Functionswerte $f(x_1), f(x_3) \ldots f(x_{2n-1})$ durch die grössten Werte $M_1, M_3, \ldots M_{2n-1}$ aus den betreffenden Intervallen, so entsteht eine dritte Summe

(9) $$S' = \sum_{1}^{n-1} (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-1}) M_{2\varkappa-1},$$

welche grösser ist als S.

Demnach ist die Summe S *eingeschlossen zwischen die Grenzen*

(10) $$S_1 < S < S'.$$

2) *Die beiden Summen* S_1, S' *lassen sich selbst wieder zwischen zwei Grenzen einschliessen.*

Bezeichnen nämlich m, M respective den kleinsten und grössten Wert, welchen die Function $f(x)$ in dem ganzen Intervalle (a, b) annimmt, so wird die Summe S_1 verkleinert, wenn man in ihr die einzelnen $m_{2\varkappa-1}$ durch m ersetzt, und geht über in

$$m \sum_{1}^{n} (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) = m(b - a);$$

hingegen wird die Summe S' vergrössert, wenn man an die Stelle der verschiedenen $M_{2\varkappa-1}$ treten lässt M, und sie nimmt den Wert

$$M \sum_{1}^{n} (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) = M(b - a)$$

an.

Demnach ist unter Einbeziehung von (10)

(11) $$m(b - a) < S_1 < S < S' < M(b - a).$$

3) *Mit zunehmender Anzahl der Theilintervalle wächst die Summe* S_1 *beständig, während die Summe* S' *beständig abnimmt.*

Man kann sich die Theilung von (a, b) derart fortgesetzt und die Anzahl der Theile wachsend denken, dass die Zahlen der Reihe (6) beibehalten und neue Zahlen eingeschaltet werden; dadurch zerfällt im allgemeinen jedes frühere Intervall wie $(x_{2\varkappa-2}, x_{2\varkappa})$ in mehrere kleinere; bildet man für diese die Theilsumme $S_1^{(\varkappa)}$ nach Vorschrift von (8), so lassen sich auf $(x_{2\varkappa-2}, x_{2\varkappa})$ dieselben Schlüsse anwenden wie unter 2) auf (a, b), d. h. es ist

$$(x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) m_{2\varkappa-1} < S_1^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n);$$

durch Addition aller dieser Ungleichungen ergibt sich eine neue, in welcher links die auf die ursprüngliche Theilung (6)

gegründete Summe S_1, rechts die auf die erweiterte Theilung gegründete gleichartige Summe steht; und letztere ist hiernach thatsächlich grösser als erstere.

Desgleichen gelten für die auf das Intervall $(x_{2\varkappa-2}, x_{2\varkappa})$ bezügliche nach Vorschrift von (9) gebildete Theilsumme $S'_\varkappa$ die Schlüsse von 2), d. h. es ist

$$S'_\varkappa < (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) M_{2\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

und durch Addition dieser Ungleichungen findet sich die Bestätigung dafür, dass die auf erweiterte Theilung gegründete Summe S' kleiner ist, als sie es für die ursprüngliche Theilung (6) war.

4) *Die auf irgend eine Theilung von* (a, b) *bezügliche Summe* S_1 *ist kleiner als die auf dieselbe oder eine beliebige andere Theilung gegründete Summe* S'.

Wenn die Summen sich auf die nämliche Theilung beziehen, wie es in den Formeln (8) und (9) ausgedrückt ist, so leuchtet die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar ein; denn die Glieder von S_1 sind dann kleiner, als die correspondirenden Glieder von S' (vgl. (10)).

Nun setzen wir zwei verschiedene Theilungen voraus, und zwar

$$\text{(T)} \qquad a = x_0, \; x_2, \; x_4, \ldots x_{2n-2}, \; x_{2n} = b$$

$$\text{(T}'\text{)} \qquad a = x_0', \; x_2', \; x_4', \ldots x'_{2n'-2}, \; x'_{2n'} = b$$

und fassen beide zu einer dritten Theilung

$$\text{(T}''\text{)} \qquad a = x_0'', \; x_2'', \; x_4'', \ldots x''_{2n''-2}, \; x''_{2n''} = b$$

zusammen, derart, dass die Zahlen von (T″) die arithmetisch geordneten Zahlen von (T) *und* (T′) sind. Die auf eine dieser Theilungen bezüglichen Summen bezeichnen wir mit $S_1(T)$, $S'(T'')$ u. s. w.

Dann ergeben sich auf Grund des Vorausgeschickten die folgenden Ungleichungen. Es ist

$$S_1(T) < S_1(T''),$$

weil (T'') eine Fortsetzung von (T) darstellt und S_1 mit fortgesetzter Theilung wächst; ferner

$$S_1(T'') < S'(T''),$$

weil beide Summen auf der nämlichen Theilung beruhen, endlich

$$S'(T'') < S'(T'),$$

weil (T'') auch eine Fortsetzung von (T') darstellt und S' mit fortgesetzter Theilung abnimmt. Aus dem Zusammenhange dieser drei Ungleichungen folgt, dass

$$S_1(T) < S'(T'),$$

wodurch die obige Behauptung auch in ihrem zweiten Theile erwiesen ist.

5) *Jede der Summen* S_1, S' *convergirt mit unendlich fortschreitender Theilung von* (a, b) *gegen eine bestimmte Grenze, welche unabhängig ist von der Art der Theilung, wenn nur sämmtliche Theilintervalle sich der Null nähern.*

Dieser Satz ist eine Folge der bisher bewiesenen Eigenschaften jener Summen. Denn da S_1 mit fortschreitender Theilung beständig wächst und doch kleiner bleibt als alle S', die ihrerseits wieder eine obere Grenze (11) haben, so besitzt S_1 nothwendig einen bestimmten Grenzwert. Das Nämliche lässt sich von S' aussagen.

6) *Die beiden Grenzwerte,* $\lim S_1$ *und* $\lim S'$, *sind einander gleich.*

Laut den Formeln (8), (9) ist der Unterschied zweier auf die Theilung (6) bezüglichen Summen

$$S' - S_1 = \sum_1^{n-1} (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2})(M_{2\varkappa-1} - m_{2\varkappa-1});$$

die Differenz zwischen dem grössten und kleinsten Werte der Function $f(x)$ in einem Intervalle heisst nach Riemann die *Schwankung* der Function in diesem Intervalle; bezeichnet man sie in dem $\varkappa$-ten Intervalle mit $\sigma_\varkappa$, so dass

$$M_{2\varkappa-1} - m_{2\varkappa-1} = \sigma_\varkappa,$$

so ist

$$S' - S_1 = \sum_1^{n-1} (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2})\,\sigma_\varkappa. \tag{12}$$

Ersetzt man die verschiedenen $\sigma_\varkappa$ durch das grösste unter ihnen, das σ heissen möge, so wird die Summe rechts vergrössert; mithin ist

$$S' - S_1 < \sigma \sum_{1}^{n-1} (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) = (b-a)\,\sigma.$$

Da nun die Function $f(x)$ als stetig vorausgesetzt wurde, so nehmen die Schwankungen mit fortgesetzter Theilung beständig ab und werden schliesslich kleiner als eine beliebig klein festgesetzte Zahl; denn die Annahme, die Schwankung sinke, wie klein auch das Intervall werde, unter einen festgesetzten Betrag nicht herab, stünde mit dem Wesen der Stetigkeit im Widerspruch (17, 2)). Es wird also bei fortschreitender Theilung auch die grösste unter den Schwankungen, σ, kleiner als eine beliebig kleine Zahl, daher ist in aller Strenge

$$\lim S_1 = \lim S'. \tag{13}$$

7) *Die Summe* S *hat bei unaufhörlich fortschreitender Theilung, bei welcher die Theilintervalle sämmtlich der Null sich nähern, einen bestimmten Grenzwert.*

Denn die Summe S ist beständig zwischen den Summen S_1 und S' eingeschlossen derart, dass sie grösser ist als alle S_1 und kleiner als alle S'; und da die S_1 und die S' gegen eine gemeinsame Grenze convergiren, so ist diese auch der Grenzwert von S, d. h. es ist

$$\lim S = \lim S_1 = \lim S'. \tag{14}$$

Hiermit ist der Beweis des an die Spitze dieses Artikels gestellten Satzes vollendet.

214. Auf diesen Satz gründet sich nun die folgende Definition:

Der Grenzwert, welchem die mit der stetigen Function $f(x)$ gebildete Summe

$$S = (x_2 - a)f(x_1) + (x_4 - x_2)f(x_3) + \cdots + (b - x_{2n-2})f(x_{2n-1})$$
$$= \sum_{1}^{n} (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-1})$$

bei beständig zunehmender Zahl der Theile von (a, b) und Abnahme jedes einzelnen gegen Null zustrebt, wird das über das Intervall (a, b) erstreckte bestimmte Integral der Function $f(x)$ genannt und durch das Symbol

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet; a heisst die untere, b die obere Grenze des Integrals, $f(x)dx$ sein Element.

Diese Definition soll durch die Gleichung

$$(15)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-1})$$

dargestellt werden, zu welcher nur zu bemerken ist, dass $x_0 = a$ und $x_{2n} = b$ ist.

Das Symbol ist der Entstehung angepasst; das von Leibniz eingeführte langgezogene $\int$, das *Integralzeichen*, deutet auf die Bildung einer Summe und das Element $f(x)dx$ auf den Bau der Glieder dieser Summe hin; jedes Glied ist nämlich das Product aus der Differenz zweier Werte der Variablen und aus einem Werte der Function, dessen Argument dem Intervalle der beiden Werte der Variabeln angehört. Die Zufügung der Grenzen zu dem Integralzeichen ist durch Fourier eingeführt worden.

Der Definition (15) zufolge erfordert die Berechnung eines bestimmten Integrals die Durchführung zweier Processe: einer *Summirung* und eines darauffolgenden *Grenzüberganges.* Aber nur in sehr einfachen Fällen gelingt es, diese Processe direct zu vollziehen; es wird sich daher um andere Mittel zur Auswertung eines bestimmten Integrals handeln.

Wenn man den Beweis des Satzes in **213**, auf welchen der Begriff des bestimmten Integrals sich stützt, genau verfolgt, so wird man gewahr, dass die Schlüsse 1) bis 5) auch dann aufrecht bleiben, wenn von der Function $f(x)$ nur angenommen wird, sie sei eine *begrenzte* Function, d. h. eine solche, dass keiner ihrer Werte *unter* einer bestimmten Zahl und keiner *über* einer bestimmten (grösseren) Zahl liegt. Erst in dem Schlusse 6) wird von der Eigenschaft der Stetigkeit Gebrauch gemacht.

Setzt man also $f(x)$ blos als eine begrenzte Function voraus, so hängt die Existenz eines bestimmten Grenzwertes der Summe S und damit die Existenz eines bestimmten Integrals

davon ab, ob die Summen S_1 und S' gegen eine und dieselbe Grenze convergiren; dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Differenz (12) gegen Null abnimmt, d. h. wenn

$$\lim \sum (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) \sigma_\varkappa = 0 \tag{16}$$

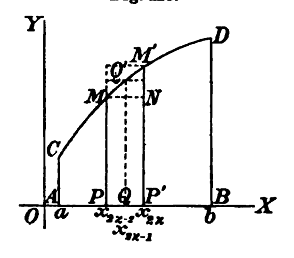
ist. Ist diese Bedingung, welche verlangt, *dass die Summe der mit den zugehörigen Schwankungen multiplicirten Intervalle bei fortschreitender Theilung von* (a, b) *der Null sich nähert,* erfüllt, so nennt man die Function $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) *integrabel.*

Von einer in (α, β) *stetigen* Function kann man daher sagen, sie sei in jedem Intervalle (a, b), das dem (α, β) angehört, integrabel.

Aber auch eine begrenzte Function, die an einer beschränkten Anzahl von Stellen in (a, b) einen endlichen Sprung macht (18, 2)), ist in (a, b) integrabel; denn, obwohl den Sprungstellen Intervalle mit endlich bleibender Schwankung entsprechen, so convergirt doch auch der von diesen Intervallen herrührende Antheil der Summe (16) gegen Null.

215. Bevor wir auf Beispiele directer Berechnung bestimmter Integrale auf Grund der Formel (15) eingehen, sollen specielle Formen der darin auftretenden Summe gebildet werden. Dies möge jedoch an der Hand der *geometrischen Interpretation des bestimmten Integrals* geschehen.

Fig. 113.



Der Gleichung

$$y = f(x),$$

in welcher $f(x)$ eine stetige Function bedeutet, entspricht eine Curve CD, Fig. 113; dem Intervalle (a, b) eine Strecke AB in der Abscissenaxe; dem Theilintervalle $(x_{2\varkappa-2}, x_{2\varkappa})$ eine andere Strecke PP' innerhalb AB; dem Zwischenwerte $x_{2\varkappa-1}$ ein Punkt Q auf PP'; dem Functionswerte $f(x_{2\varkappa-1})$ die Ordinate QQ', von der wir zunächst annehmen, dass sie in dem Bereiche (a, b) beständig positiv sei. Mithin ist das Product

$$(x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-1}) = PP' \cdot QQ' \tag{17}$$

die Fläche des Rechtecks mit der Basis PP' und der Höhe QQ' und die Summe

$$S = \sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-1})$$

die Summe der gleichartigen über allen Theilen von AB errichteten Rechtecke. Unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte Q convergirt diese Rechtecksumme bei fortschreitender Theilung von AB gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert

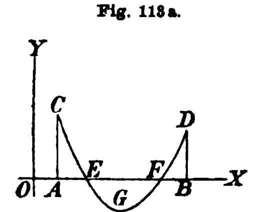
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Diesen Grenzwert erklärt man naturgemäss als *die Fläche der theilweise von der Curve begrenzten Figur* $ABDC$.

Es löst demnach das bestimmte Integral eine Aufgabe der Geometrie, welche der elementaren Mathematik unzugänglich ist: die Berechnung der Fläche oder die *Quadratur* einer krummlinig begrenzten Figur. Aus dieser geometrischen Aufgabe hat denn auch Leibniz den Begriff des bestimmten Integrals entwickelt.

Ist $f(x_{2\varkappa-1})$ negativ und setzt man ein für alle mal voraus, dass die Werte $x_0, x_2, \ldots x_{2n}$ *steigend* geordnet, die Differenzen $x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}$ also positiv sind, so gibt Formel (17) die *negative* Flächenzahl des betreffenden Rechtecks. Wenn daher die Curve CD innerhalb des Bereichs (a, b) theils über, theils unter der Abscissenaxe liegt, so liefert das Integral die algebraische Summe der positiv gezählten Flächentheile über und der negativ gezählten Flächentheile unter der Abscissenaxe, also in Fig. 113a den Wert $AEC - EGF + FBD$.

Fig. 113a.



Da die Wahl der Zwischenpunkte Q willkürlich ist, so kann auch P oder P', Fig. 113, dafür genommen werden; damit ergeben sich die folgenden speciellen Formen der Summe S:

$$S = \sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-2}) \tag{18}$$

$$(19)\qquad S=\sum_{1}^{n}(x_{2\varkappa}-x_{2\varkappa-2})f(x_{2\varkappa}),$$

die erste mit den *Anfangswerten* der Function, die zweite mit den *Endwerten* gebildet.

Weil ferner die Art der Intervalltheilung ohne Einfluss auf den Grenzwert ist, so kann man auch die Theile gleich machen; dann ist

$$\frac{b-a}{n}=h$$

ein solcher Theil,

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ldots b$$

die Wertreihe, welche die Theilung bestimmt, und entsprechend den Formen (18), (19) ergeben sich folgende Definitionen für das bestimmte Integral:

$$(20)\quad \int_a^b f(x)dx=\lim_{h=0}\left\{h(f(a)+f(a+h)+\cdots+f(b-h))\right\}$$

$$=\lim_{n=\infty}\left\{\frac{b-a}{n}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}f\left(a+\varkappa\frac{b-a}{n}\right)\right\}$$

oder

$$(21)\quad \int_a^b f(x)dx=\lim_{h=0}\left\{h(f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(b))\right\}$$

$$=\lim_{n=\infty}\left\{\frac{b-a}{n}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}f\left(a+\varkappa\frac{b-a}{n}\right)\right\}.$$

Formel (20) bestimmt die Fläche $ABDC$ als Grenzwert der Summe der *inneren* Rechtecke $P'M$, Formel (21) als Grenzwert der Summe der *äusseren* Rechtecke PM'; diese Benennung ist jedoch angepasst dem in Fig. 113 dargestellten Falle, wo die Curve CD steigt; sie würde sich umkehren, wenn die Curve fiele; bei einer bald steigenden, bald fallenden Curve ist sie nicht anwendbar.

216. *Beispiele.* 1) Behufs Ermittlung des Integrals $\int_a^b x^2dx$ hat man zufolge (20) den Grenzwert

$$\frac{b-a}{n}\left[a^2+\left(a+\frac{b-a}{n}\right)^2+\left(a+2\frac{b-a}{n}\right)^2+\cdots+\left(a+\overline{n-1}\,\frac{b-a}{n}\right)^2\right]$$

für $\lim n = \infty$ zu bestimmen; dieser Ausdruck verwandelt sich nach Ausführung der Quadrate in

$$\frac{b-a}{n}\Big[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}(1+2+\cdots+\overline{n-1}) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2(1^2+2^2+\cdots+\overline{n-1}^2)\Big]$$

$$= \frac{b-a}{n}\Big[na^2 + a(b-a)(n-1) + (b-a)^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\Big].$$

$$= (b-a)\Big[a^2 + a(b-a)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\Big];$$

demnach ist sein Grenzwert

$$(b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3},$$

so dass

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

2) Zur Wertbestimmung des Integrals $\int_\alpha^\beta a^x dx$ hat man den Grenzwert von

$$h[a^\alpha + a^{\alpha+h} + \cdots + a^{\alpha+\overline{n-1}h}]$$

für $\lim h = 0$ mit der Maassgabe zu bilden, dass $nh = \beta - \alpha$ ist; nun lässt sich dieser Ausdruck umformen in

$$a^\alpha h(1 + a^h + a^{2h} + \cdots + a^{\overline{n-1}h}) = \frac{a^\alpha h(a^{nh}-1)}{a^h-1} = \frac{a^\beta - a^\alpha}{\frac{a^h-1}{h}}$$

und da $\lim\limits_{h=0}\frac{a^h-1}{h} = l.a$ (107, (2)), so hat man

$$\int_\alpha^\beta a^x dx = \frac{a^\beta - a^\alpha}{l.a}.$$

3) Die Ausrechnung des Integrals $\int_a^b \sin x\,dx$ kommt auf die Bestimmung des Grenzwertes von

$$h[\sin a + \sin(a+h) + \cdots + \sin(a+\overline{n-1}h)]$$

für $\lim h = 0$ und $nh = b - a$ zurück. Die eingeklammerte Summe lässt sich wie folgt bilden. Geht man von der Formel

$$2\sin(a+\varkappa h)\sin\frac{h}{2}$$

$$= \cos\left(a + \frac{2\varkappa-1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2\varkappa+1}{2}h\right)$$

aus und wendet sie auf $x = 0, 1, \ldots n-1$ an, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$2\sin a \sin\frac{h}{2} = \cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)$$

$$2\sin(a+h)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{3h}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin(a+\overline{n-1}\,h)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(a + \frac{2n-3}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right)$$

und durch seine Summirung die Gleichung

$$2\sin\frac{h}{2}\left[\sin a + \sin(a+h) + \cdots + \sin(a+\overline{n-1}\,h)\right]$$
$$= \cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right),$$

woraus

$$\sin a + \sin(a+h) + \cdots + \sin(a+\overline{n-1}\,h)$$
$$= \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\sin\left(a + \frac{\overline{n-1}\,h}{2}\right).$$

Es bleibt also der Grenzwert von

$$2\sin\frac{b-a}{2}\,\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\,\sin\left(\frac{b+a}{2} - \frac{h}{2}\right)$$

zu bestimmen und dieser ist (16, 2))

$$2\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{b+a}{2} = \cos a - \cos b.$$

Demnach ist

$$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Auf ganz analogem Wege lässt sich auch $\int_a^b \cos x\,dx$ ermitteln.

217. Aus dem bekannten Begriffe des bestimmten Integrals lässt sich eine Reihe von Eigenschaften desselben ableiten, welche bei der Rechnung mit Integralen beständige Anwendung finden.

1) *Ein Integral, in welchem die untere Grenze der oberen gleich ist, hat den Wert Null.*

Es ist also

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{22}$$

Denn das Integrationsintervall (a, a) hat keine Ausdehnung.

2) *Durch gegenseitige Vertauschung der beiden Grenzen eines Integrals ändert sich nur dessen Vorzeichen.*

Die auf die Wertfolge

$$a = x_0, x_2, \ldots x_{2n} = b$$

gegründete Summe S hat den Ausdruck

$$\sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-1}),$$

die gleichartige auf die Wertfolge

$$b = x_{2n}, x_{2n-2}, \ldots x_2, x_0 = a$$

bezügliche Summe den Ausdruck

$$\sum_1^n (x_{2\varkappa-2} - x_{2\varkappa}) f(x_{2\varkappa-1}),$$

es ist also

$$\sum_1^n (x_{2\varkappa-2} - x_{2\varkappa}) f(x_{2\varkappa-1}) = -\sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-1}).$$

Durch den mehrfach beschriebenen Übergang zur Grenze folgt daraus

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx. \tag{23}$$

Bei der geometrischen Darstellung ist das Integrationsintervall durch eine Strecke der x-Axe versinnlicht, und den beiden Integrationsfolgen (a, b), (b, a) entsprechen die beiden Richtungen dieser Strecke; man kann daher auch sagen, mit der Anderung der Integrationsrichtung ändere sich das Vorzeichen des Integrals.

3) *Sind a, b, c drei Zahlen, welche dem Integrabilitätsbereiche der Function $f(x)$ angehören, so ist*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx. \tag{24}$$

Ist $a < b < c$, so zerfällt (a, c) durch den Zwischenwert b in zwei Theile, und die auf diese Theile (a, b), (b, c) bezüglichen Summen S ergeben zusammen die für das ganze Intervall (a, c) geltende Summe; durch Übergang zur Grenze erhält man die Formel (24).

Wenn dagegen $a < c < b$, so sind (a, c), (c, b) die Theilintervalle, aus welchen das ganze Intervall (a, b) sich zusammensetzt, und es ist daher zunächst

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx;$$

transponirt man das zweite Integral nach rechts unter Anwendung der Formel (23), so ergibt sich die Formel (24).

Man kann dieser Formel durch Transposition der linksstehenden Integrale und durch Vertauschung der Grenzen die Gestalt

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0 \tag{25}$$

geben, welche an die Rechnung mit Strecken in einer Geraden erinnert: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

Die Formeln (24) und (25) können auf beliebig viele im Integrabilitätsbereiche liegende Zahlen ausgedehnt werden nach dem Schema: $(a, c_1) + (c_1, c_2) + \cdots + (c_p, a) = 0$.

4) *Ein constanter Factor der zu integrirenden Function kann vor das Integralzeichen genommen werden und umgekehrt.*

Aus der für die endliche Summe S geltenden Gleichung

$$\sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2})\,cf(_{2\varkappa-1}) = c\sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2})f(x_{2\varkappa-1})$$

folgt durch Übergang zur Grenze

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{26}$$

5) *Das über (a, b) erstreckte Integral einer Summe von Functionen kommt der analog gebildeten Summe der über (a, b) erstreckten Integrale der einzelnen Summanden gleich.*

Es seien nämlich $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei auf dem Gebiete (a, b)

integrable Functionen; die auf ihre Summe $\varphi(x) + \psi(x)$ bezügliche Summe S lässt sich wie folgt umformen:

$$\sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2})[\varphi(x_{2\varkappa-1}) + \psi(x_{2\varkappa-1})]$$

$$= \sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2})\varphi(x_{2\varkappa-1}) + \sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2})\psi(x_{2\varkappa-1});$$

daraus ergibt sich

$$(27) \qquad \int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)]\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Die Formel kann auf jede beschränkte Anzahl von Summanden ausgedehnt werden.

6) *Zwischen dem kleinsten Werte m und dem grössten Werte M, welche die Function $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) annimmt, liegt nothwendig eine Zahl μ derart, dass*

$$(28) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\mu.$$

Denn jede auf eine Untertheilung von (a, b) gegründete Summe S ist so beschaffen, dass

$$(b - a)m < \mathrm{S} < (b - a)M$$

(**213**, 2)); diese Beziehung hält also auch der Grenzwert von S ein, d. h. es ist auch

$$(b - a)m < \int_a^b f(x)\,dx < (b - a)M.$$

Hieraus aber folgt die behauptete Gleichung (28).

Ist die Function $f(x)$ stetig, so nimmt sie den Wert μ mindestens an einer Stelle zwischen a und b auch wirklich an (**17**, 3)); eine solche Stelle kann man durch $a + \theta(b - a)$ darstellen, wenn $0 < \theta < 1$ ist; folglich lautet dann die Formel (28)

$$(29) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b - a)f(a + \theta(b - a)).$$

Die Zahl μ wird in verschiedenen Gebieten der Anwendung unter dem Namen des *Mittelwertes der Function in dem*

Intervalle (a, b) in Bezug auf die Variable x benützt. Diese Bezeichnung gründet sich auf folgenden Umstand. Legt man dem Integrale die Definition **215**, (20) zu Grunde, so ist

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n=\infty} \frac{f(a)+f(a+h)+\cdots+f(b-h)}{n} \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right);$$

die rechte Seite aber ist der Grenzwert des arithmetischen Mittels einer gleichmässig über (a, b) vertheilten Folge von Werten der Function, die linke Seite die in (28) erklärte Zahl μ. Zugleich hat man zur Bestimmung von μ die Formel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{30}$$

Aus der Formel (29) kann gefolgert werden: *Ist die Function $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) niemals negativ (positiv), so hat das Integral $\int_a^b f(x)dx$ dasselbe (das entgegengesetzte) Vorzeichen wie $b - a$.*

Hieraus darf weiter geschlossen werden: *Ist $a < b$ und $f(x) \geqq \varphi(x)$ für alle Werte von x aus dem Intervalle (a, b), ohne dass das Gleichheitszeichen fortbesteht, so ist*

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{31}$$

Denn nach den gemachten Voraussetzungen ist $b - a > 0$ und $f(x) - \varphi(x) \geqq 0$, folglich

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx > 0,$$

woraus sich mit Hilfe von (27) die obige Beziehung ergibt.

7) *Der Wert eines bestimmten Integrals ist von dem Zeichen für die Variable unabhängig;* es ist also

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Für a, b können zwei beliebige Zahlen aus dem Integrabilitätsbereiche (α, β) genommen werden; hält man die eine, a,

fest, denkt sich die andere variabel und bezeichnet sie demgemäss mit x, so hat zwar

$$\int_a^x f(t)dt \tag{32}$$

noch die Form, aber nicht mehr die strenge Bedeutung eines bestimmten Integrals; da zu jedem aus (α, β) stammenden Werte von x ein und nur ein bestimmter Wert von (32) gehört, so kann man sagen: *Ein Integral mit fester unterer und variabler oberer Grenze stellt eine eindeutige Function dieser letzteren Grenze dar; dieser Darstellung gemäss nennt man die durch* (32) *definirte Function eine Integralfunction.*

Statt des Zeichens (32) kann man auch ohneweiters das Symbol

$$\int_a^x f(x)\,dx \tag{32*}$$

gebrauchen, wenn man sich daran gewöhnt, zwischen der Variabeln unter dem Integralzeichen — der *Integrationsvariabeln* — und der *variablen Grenze* gehörig zu unterscheiden.

8) *Das Integral einer endlichen Function $f(x)$ ist eine stetige Function der oberen Grenze.*

Sind $a, x, x+h$ drei Werte aus dem Integrabilitätsbereiche (α, β), so ist

$$\int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+h} f(x)dx = \int_a^{x+h} f(x)dx,$$

daraus

$$\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

und für einen entsprechend ausgewählten Wert μ zwischen dem kleinsten und grössten Werte von $f(x)$ in $(x, x+h)$

$$\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = h\mu; \tag{33}$$

da μ endlich ist, so convergirt die rechte Seite mit h zugleich gegen Null; es ist also

$$\lim_{h=0}\left\{\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx\right\} = 0,$$

womit die Stetigkeit erwiesen ist; an einer Stelle x innerhalb (α, β) kann der letzte Grenzübergang beiderseitig ($\lim h = \pm 0$) ausgeführt werden, bei α oder β nur einseitig.

9) *Der Differentialquotient des Integrals einer stetigen Function in Bezug auf die obere Grenze ist der zu dieser Grenze gehörige Wert der integrirten Function.*

Ist $f(x)$ eine stetige Function, so kann die Gleichung (33) auch in der speciellen Form (29)

$$\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = hf(x + \theta h)$$

geschrieben werden; daraus folgt

$$\frac{\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{h} = f(x + \theta h);$$

der Grenzwert der linken Seite für $\lim h = \pm 0$ ist der Differentialquotient der Integralfunction, der Grenzwert der rechten Seite vermöge der vorausgesetzten Stetigkeit $f(x)$; daher ist in der That

$$D_x \int_a^x f(x)dx = f(x). \tag{34}$$

An den Endstellen α, β ist nur einseitiger Grenzübergang möglich.

Durch Multiplication dieser Gleichung mit dx, d. i. mit dem Differential der oberen Grenze, ergibt sich

$$d\int_a^x f(x)dx = f(x)dx. \tag{35}$$

Diesen bestimmten Sinn hat die Aussage, dass die Zeichen d und $\int$, wenn sie auf einander folgen, sich aufheben.

218. Mit dieser letzten Eigenschaft der Integralfunction sind wir bei der Aufgabe wieder angekommen, welche in **212** als das Grundproblem der Integral-Rechnung bezeichnet worden ist. Es handelte sich darum, eine — selbstverständlich stetige — Function zu finden, deren Differentialquotient an jeder Stelle x des Intervalls (α, β) der gegebenen eindeutigen Function $f(x)$ gleichkommt. Für den Fall, dass $f(x)$

in dem Intervalle (α, β) stetig ist, hat man also in der Integralfunction

$$\int_a^x f(x)\,dx \tag{36}$$

eine Lösung der Aufgabe, weil dann nach oben Bewiesenem

$$D_x \int_a^x f(x)\,dx = f(x). \tag{37}$$

Aber es ist nicht die einzige Lösung der Aufgabe; denn auch jede Function von der Form

$$C + \int_a^x f(x)\,dx, \tag{38}$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet, theilt mit (36) die in (37) ausgesprochene Eigenschaft.

Ausserdem gibt es keine andern Functionen dieser Art mehr. Dann bezeichnet man die Function (38) mit $\varphi(x)$ und nimmt man an, es existire ausser ihr noch eine Function $\Phi(x)$ dieser Eigenschaft, so folgte aus dem gleichzeitigen Bestande der Gleichungen

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x), \qquad \frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$$

für alle Werte von x aus (α, β), dass für alle diese Werte

$$\frac{d[\Phi(x) - \varphi(x)]}{dx} = 0$$

sei; das führte weiter (38) zu

$$\Phi(x) - \varphi(x) = C'$$

oder zu $\Phi(x) = C' + \varphi(x)$. Das aber ist in (38) selbst enthalten.

Die Aufgabe, eine Function zu finden, deren Differentialquotient durch eine gegebene stetige Function dargestellt ist, hat hiernach unendlich viele Lösungen; mit einer derselben sind aber alle andern bekannt, weil sie sich von ihr nur um eine additive willkürliche Constante — die Integrationsconstante genannt — unterscheiden.

Unter den unendlich vielen Functionen, welche die Lösung der Aufgabe bilden, ist die specielle (36) dadurch gekenn-

zeichnet, dass sie für $x = a$ den Wert Null hat (**217**, 1)). Aus der Gesammtheit aller Lösungen, die durch (38) dargestellt ist, hebt sich eine einzelne hervor, sobald man festsetzt, dass sie an der Stelle $x = a$ einen bestimmten Wert A haben soll; denn aus

$$\left\{C + \int_a^x f(x)\,dx\right\}_{x=a} = A$$

folgt

$$C = A - \int_a^a f(x)\,dx = A;$$

somit ist

$$A + \int_a^x f(x)\,dx$$

die herausgehobene Function.

Der Ausdruck (38) oder die Gesammtheit aller Functionen, welche die gegebene Function $f(x)$ zum Differentialquotienten haben, nennt man das *unbestimmte Integral der Function* $f(x)$ oder auch ihre *Stammfunction* und bedient sich dafür des Zeichens

$$\int f(x)\,dx, \tag{39}$$

welches dem des bestimmten Integrals nachgebildet ist, aber der Grenzen ermangelt. Die Gleichung

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

drückt dann die Thatsache aus, die Function $F(x)$ sei *eine* von den Functionen, welche $f(x)$ als Differentialquotienten geben.

219. In Artikel **212** ist von der Annahme der Existenz einer stetigen Function $F(x)$ ausgegangen worden, welche die gegebene Function $f(x)$ zum Differentialquotienten hat. Auf Grund dessen ergab sich die Gleichung

$$F(b) - F(a) = \sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(\xi_{2\varkappa-1}); \tag{40}$$

darin bedeutet $\xi_{2\varkappa-1}$ einen solchen Wert der Variabeln aus dem Intervalle $(x_{2\varkappa-2}, x_{2\varkappa})$, dass

$$F(x_{2\varkappa}) - F(x_{2\varkappa-2}) = (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(\xi_{2\varkappa-1}),$$

und ein solcher Wert existirt dem Mittelwertsatze (37) zufolge immer.

Nun ist in 213 bewiesen worden, dass die Summe

$$\sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-1})$$

mit beständig wachsendem n gegen einen bestimmten Grenzwert convergirt, wie auch die Zwischenwerte $x_{2\varkappa-1}$ gewählt worden sind; daher ist auch die Wahl

$$x_{2\varkappa-1} = \xi_{2\varkappa-1}$$

zulässig, d. h. auch die Summe auf der rechten Seite von (40) convergirt gegen diesen bestimmten Grenzwert, welchen wir als das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

definirt haben. Da nun die Gleichung (40) zurecht besteht ohne Rücksicht auf die Anzahl der Theilintervalle und das Gesetz der Theilung, so gilt auch

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dadurch sind wir zu einem *Hauptsatze* der Integral-Rechnung gekommen, welcher das wichtigste Hilfsmittel zur Berechnung bestimmter Integrale an die Hand gibt. Dieser Satz lässt sich folgendermaassen aussprechen:

Ist $F(x)$ eine stetige Function, welche die integrable Function $f(x)$ zum Differentialquotienten hat, so ergibt sich das über das Intervall (a, b) erstreckte Integral von $f(x)$, indem man von dem Werte der Function $F(x)$ an der oberen Grenze b ihren Wert an der unteren Grenze a subtrahirt, in Zeichen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{41}$$

Für die Differenz $F(b) - F(a)$ bedient man sich auch des von Cauchy eingeführten Substitutionszeichens $\Big|_a^b F(x)$ oder des Symbols $\{F(x)\}_a^b$.

Aus dem Satze ist zu ermessen, welchen Vortheil es hat, wenn von einer zur Integration vorgelegten Function das unbestimmte Integral bekannt ist; jedes bestimmte Integral ist dann durch blosse Substitution seiner Grenzen in das unbestimmte Integral berechenbar.

Es wird sich daher als eine wichtige Aufgabe darstellen, für die einfachen elementaren Functionen und aus denselben zusammengesetzte Functionsformen die unbestimmte Integration in dem Sinne durchzuführen, dass man andere elementare und aus solchen durch eine beschränkte Anzahl von Operationen zusammengesetzte Functionen zu bestimmen sucht, welche die ersteren als Differentialquotienten ergeben.

§ 2. Grundformeln und -Methoden der Integral-Rechnung.

220. Wenn die Aufgabe der Integral-Rechnung dahin aufgefasst wird, dass sie zu einem gegebenen Differentialquotienten, der für ein Intervall (α, β) als eindeutige stetige Function von x definirt ist, die ursprüngliche Function zu bestimmen hat, so ist das Integriren die inverse Operation des Differentiirens und lässt sich aus jeder Differentialformel durch Umkehrung eine Integralformel ableiten. Eine *Methode* des Integrirens bildet dieser Vorgang nicht, weil dabei nicht von der zur Integration vorgelegten Function ausgegangen wird; durch Anwendung desselben auf die Differentialformeln für die elementaren Functionen (**29.**—**33.**) ergeben sich aber Formeln, welche den Ausgangspunkt für alle weiteren Operationen bilden; diese *Grundformeln der Integral-Rechnung* sollen im Nachfolgenden zusammengestellt werden.

1) Für jedes $n \lesseqgtr -1$ ist $d\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = x^n dx$, daher auch

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{1}$$

Ist $n > 0$, so gehört auch der Wert $x = 0$ dem Stetigkeitsbereiche von x^n an und darf daher auch in das Integrationsintervall einbezogen werden; insbesondere ist dann

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

2) Der in der Formel (1) ausgeschlossene Fall $n = -1$ erledigt sich dadurch, dass $d\,l.x = \frac{dx}{x}$ ist; demnach gilt

$$(2) \qquad \int \frac{dx}{x} = l.x + C.$$

Diese Formel setzt $x > 0$ voraus; bemerkt man, dass auch $d\,l.\varkappa x = \frac{dx}{x}$, sofern $\varkappa$ eine Constante bedeutet, so folgt, dass auch

$$\int \frac{dx}{x} = l.\varkappa x + C$$

gesetzt werden kann; bei negativem x setzt man daher $\varkappa = -1$ und hat

$$(2^*) \qquad \int \frac{dx}{x} = l.(-x) + C.$$

Sind also a, b zwei positive oder zwei negative Zahlen, so gibt die Anwendung von (2), beziehungsweise (2*) beidemal

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l.\frac{b}{a};$$

wären a, b entgegengesetzt bezeichnet, so verriethe schon das imaginäre Resultat die Unzulässigkeit der Formel. In der That wird die Function $\frac{1}{x}$ in einem solchen Intervalle (a, b) unstetig, nämlich an der Stelle $x = 0$, und erfüllt nicht die Bedingungen der Integrabilität.

Die Formel (2), welche den Ausnahmefall von (1) erledigt, lässt sich jedoch auch in diese Formel einfügen; nach (1) ist nämlich

$$\int_1^x x^n dx = \frac{x^{n+1} - 1}{n + 1};$$

betrachtet man in dem Resultate x als fest und n als variabel, so kommt (107, (2))

$$\lim_{n=-1} \frac{x^{n+1} - 1}{n+1} = l.x$$

und das ist laut (2) thatsächlich der für $n = -1$ geltende Wert des Integrals.

3) Aus den Formeln $d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1 + x^2} = d(-\operatorname{arccotg} x)$ folgt

$$(3)\qquad \begin{cases} \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccotg} x + C; \end{cases}$$

die Formeln widersprechen einander nicht, weil

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Statt der Hauptwerte der cyclometrischen Functionen kann man auch jeden aus den allgemeinen Functionen

$$\operatorname{Arctg} x = n\pi + \operatorname{arctg} x$$
$$\operatorname{Arccotg} x = n'\pi + \operatorname{arccotg} x$$

durch Specialisirung des n, beziehungsweise des n' hervorgehenden Zweig in (3) einsetzen.

4) Aus den beiden Formeln

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(-\arccos x)$$

ergibt sich

$$(4)\qquad \begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C \end{cases}$$

und es gilt eine analoge Bemerkung wie in 3); die Quadratwurzel ist hier positiv.

An Stelle von $\arcsin x$ kann jeder Zweig der Function $\operatorname{Arcsin} x$ genommen werden, für welchen der Cosinus positiv ist, also

$$2n\pi + \arcsin x$$

für jedes ganze n, und an Stelle von $\arccos x$ jeder Zweig von $\operatorname{Arccos} x$, für den der Sinus positiv ist, also

$$2n'\pi + \arccos x$$

für jedes ganze n'.

5) Die unter der Voraussetzung $a > 0$ geltende Formel $d\,\frac{a^x}{l.\,a} = a^x dx$ liefert

$$(5)\qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{l.\,a} + C$$

und für $a = e$ folgt daraus speciell

$$(6)\qquad \int e^x dx = e^x + C.$$

6) Die beiden Formeln $d \sin x = \cos x\, dx$ und $d(-\cos x) = \sin x\, dx$ führen zu

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \tag{7}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C. \tag{8}$$

7) Die Formeln $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$ und $d(-\operatorname{cotg} x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$ endlich ergeben

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C. \tag{10}$$

221. Wenn die zu integrirende Function als *Summe einfacher Functionen* sich darstellt oder in eine solche umgewandelt werden kann, so lässt sich ihre Integration auf die Integration der einzelnen Summanden zurückführen.

Nach der in **217**, 5) begründeten Eigenschaft bestimmter Integrale ist für jedes dem Integrabilitätsbereiche angehörende x (obere Grenze)

$$\int_a^x [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx$$

$$= \int_a^x f_1(x)\, dx + \int_a^x f_2(x)\, dx + \cdots + \int_a^x f_n(x)\, dx,$$

daher auch

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx \tag{11}$$

$$= \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \cdots + \int f_n(x)\, dx.$$

Rechter Hand ist nach vollzogener Integration selbstverständlich nur *eine* Constante additiv hinzuzufügen.

Die Formel (11) lässt noch eine Verallgemeinerung zu; da nämlich (**217**, 4))

$$\int_a^x c f(x)\, dx = c \int_a^x f(x)\, dx,$$

so ist auch

$$\int c f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx,$$

wenn c eine Constante bezeichnet, und daher

$$(12)\quad \begin{cases} \int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n \cdot f_n(x)] dx \\ = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx + \cdots + c_n \int f_n(x) dx. \end{cases}$$

Diese Formel in Verbindung mit der Grundformel (1) gestattet schon die Integration einer ganzen Classe von Functionen, der *rationalen ganzen Functionen;* es ist nämlich unmittelbar

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) dx$$
$$= \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + a_n x + a_{n+1},$$

wenn a_{n+1} eine willkürliche Constante bezeichnet.

222. Der in dem Intervalle (a, b) zu integrirende Differentialausdruck $f(x)dx$ lasse sich als Product aus einer Function u und aus einem Differential dv darstellen, zu welch letzterem die Stammfunction v leicht bestimmt werden kann, so dass also

$$f(x)dx = udv$$

und v als bekannt angesehen werden kann. Dann ist es möglich, das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ auf ein anderes zwischen denselben Grenzen zurückzuführen.

Geht man nämlich von der Differentialformel

$$d(uv) = udv + vdu$$

aus, so ergibt sich zunächst

$$\Big\{uv\Big\}_{x=a}^{x=b} = \int\limits_{x=a}^{x=b} (udv + vdu);$$

das rechtsstehende Integral aber lässt sich in eine Summe zweier Integrale auflösen, und nach dieser Zerlegung findet man (bei einfacherer Bezeichnung der Grenzen)

$$(13)\qquad \int\limits_a^b udv = \Big\{uv\Big\}_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Es braucht nunmehr blos die obere Grenze b als (innerhalb des Integrabilitätsbereiches) variabel angesehen zu werden, um aus (13) die für unbestimmte Integration geltende Formel

(14) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

zu folgern.

Die in den Formeln (13) und (14) ausgesprochene Methode wird *partielle Integration* genannt; sie ist nur dann als mit Erfolg angewendet zu betrachten, wenn das Integral der rechten Seite einfacher ausfällt, als das ursprünglich vorgelegene.

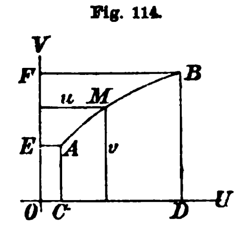


Fig. 114.

Formel (13) lässt sich an einer geometrischen Figur illustriren. Werden u, v als Coordinaten eines Punktes M in einem rechtwinkligen System UOV, Fig. 114, aufgefasst, so beschreibt der Punkt M, während x das Intervall (a, b) durchläuft, einen Curvenbogen AB, und es ist

$$\int_a^b v\,du = CDBA$$

$$\int_a^b u\,dv = EFBA$$

$$(uv)_a = OCAE$$

$$(uv)_b = ODBF;$$

zwischen diesen vier Flächen besteht aber die Beziehung

$$CDBA + EFBA = ODBF - OCAE,$$

welche sich umsetzt in

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = \Big\{uv\Big\}_a^b$$

d. i. in die Formel (13).

Beispiele. 1) Wenn $n \gtrless -1$, so lässt sich das Integral

$$\int x^n\, l.x\,dx$$

dadurch lösen, dass man $u = l.x$ und $dv = x^n dx$ setzt; es wird so

$$\int x^n\, l.x\,dx = \frac{x^{n+1}\, l.x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}\, l.x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

In dem Falle $n = -1$ handelt es sich um das Integral

$$\int \frac{l.x}{x}\,dx$$

und die Zerlegung $u = l.x$, $dv = \frac{dx}{x}$ führt wieder auf das nämliche Integral zurück, indem

$$\int \frac{l.x}{x}\,dx = (l.x)^2 - \int \frac{l.x}{x}\,dx$$

wird; nichtsdestoweniger ist die Aufgabe gelöst, da hieraus

$$\int \frac{l.x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(l.x)^2 + C$$

folgt.

2) Wenn man in dem Integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$u = \sqrt{1-x^2}$, $dv = dx$ setzt, so ergibt sich zunächst

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$

aber das Integral der rechten Seite kann durch die Umformung $x^2 = 1 - (1-x^2)$ des Zählers in zwei Theile zerlegt werden, und dann folgt weiter

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

woraus

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

3) Das Integral

$$J_n = \int x^n e^x\,dx,$$

worin n eine positive ganze Zahl bedeuten soll, gibt bei der Zerlegung $u = x^n$, $dv = e^x dx$

$$J_n = x^n e^x - nJ_{n-1}.$$

Eine Formel von dieser Art, durch welche ein vorgelegtes Integral in ein einfacheres von gleicher Gestalt umgewandelt wird, heisst eine *Reductionsformel*.

Die wiederholte Anwendung obiger Formel führt auf folgende Gleichungen

$$J_n = x^n e^x - nJ_{n-1}$$

$$J_{n-1} = x^{n-1}e^x - (n-1)J_{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_1 = xe^x - J_0;$$

das Endintegral ist $J_0 = \int e^x dx = e^x$; zum Zwecke der Elimination der Zwischenintegrale multiplicire man die Gleichungen von der zweiten angefangen der Reihe nach mit $(-1)n$, $(-1)^2 n(n-1), \ldots (-1)^{n-1} n(n-1) \ldots 2$ und bilde hierauf die Summe aller. Dadurch ergibt sich

$$J_n = e^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} n(n-1) \cdots 2x + (-1)^n n(n-1) \cdots 1] + C.$$

223. Neben der partiellen Integration ist die *Transformation der Integrationsvariabeln* eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Gewinnung neuer Integrationsformeln, beziehungsweise zur Ausrechnung oder Vereinfachung vorgelegter Integrale.

Es liege das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx \tag{15}$$

vor; an die Stelle der Variabeln x sei eine neue Variable t durch die Gleichung

$$x = \varphi(t) \tag{16}$$

einzuführen, von der wir zunächst voraussetzen, dass sie x durch t sowohl wie t durch x eindeutig bestimmt, so dass neben φ auch die inverse Function

$$t = \psi(x) \tag{16*}$$

eindeutig ist.

Mit Hilfe der Wertreihe

$$a = x_0,\ x_2,\ x_4, \ldots x_{2n} = b$$

und der in die Theilintervalle eingeschobenen Zwischenwerte

$$x_1,\ x_3, \ldots x_{2n-1}$$

bilden wir die Summe

$$\sum_1^n (x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2}) f(x_{2\varkappa-1}) \tag{17}$$

und nehmen an dieser die Transformation vor.

Vermöge der über die Transformationsgleichung (16) getroffenen Annahmen gehört zu obiger Reihe der Werte von x eine ebenfalls arithmetisch geordnete Wertreihe

$$\alpha = t_0,\ t_2,\ t_4, \ldots t_{2n} = \beta$$

und entsprechen den Zwischenwerten auch hier Zwischenwerte

$$t_1, t_3, \dots t_{2n-1}.$$

Dabei ist für jeden Zeigerwert ν

$$x_\nu = \varphi(t_\nu), \qquad t_\nu = \psi(x_\nu)$$

und insbesondere auch

$$\alpha = \psi(a), \qquad \beta = \psi(b);$$

daraus folgt weiter mit Hilfe des Mittelwertsatzes (37), dass

$$x_{2\varkappa} - x_{2\varkappa-2} = \varphi(t_{2\varkappa}) - \varphi(t_{2\varkappa-2}) = (t_{2\varkappa} - t_{2\varkappa-2})\varphi'(\tau_{2\varkappa-1}),$$

wobei $\tau_{2\varkappa-1}$ einen *bestimmten* Wert von t aus dem Intervalle $(t_{2\varkappa-2}, t_{2\varkappa})$ vorstellt.

Hiernach verwandelt sich die Summe (17) in die gleichwertige

$$\sum_1^n (t_{2\varkappa} - t_{2\varkappa-2}) f[\varphi(t_{2\varkappa-1})]\varphi'(\tau_{2\varkappa-1});$$

weil aber in Betreff der Grenzwertbestimmung die ursprünglichen Zwischenwerte $x_{2\varkappa-1}$ vollständig willkürlich sind, so gilt dies auch für die $t_{2\varkappa-1}$, und daher darf von vornherein die Wahl so getroffen gedacht werden, dass jedes

$$t_{2\varkappa-1} = \tau_{2\varkappa-1};$$

dann aber lautet die transformirte Summe

$$(18) \qquad \sum_1^n (t_{2\varkappa} - t_{2\varkappa-2}) f[\varphi(\tau_{2\varkappa-1})]\varphi'(\tau_{2\varkappa-1}).$$

Der Grenzwert derselben gibt wie jener von (17) den Wert des Integrals (15), daher ist

$$(19) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Bei der durch (16) *vorgezeichneten Transformation eines bestimmten Integrals hat man also unter dem Integralzeichen x durch $\varphi(t)$, dx durch $\varphi'(t)dt$ zu ersetzen und als Grenzen die den ursprünglichen Grenzen a, b zugeordneten Werte α, β der neuen Variabeln zu nehmen.*

Wenn die Transformationsgleichung den hier vorausgesetzten Bedingungen nicht entspricht, so bedarf es in jedem einzelnen Falle der Erwägung, ob von der Formel (19) Gebrauch ge-

macht werden darf; später vorzuführende Beispiele werden dies erläutern.

Einer speciellen Transformation sei hier besonders gedacht; sie besteht in der *Zeichenänderung der Integrationsvariabeln*, welche gleichwertig ist der Substitution

$$x = -t.$$

Man findet durch Anwendung der Formel (19)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)dx. \tag{20}$$

Hieraus resultiren zwei häufig gebrauchte Formeln. Ist nämlich $f(x)$ eine *gerade* Function, also $f(-x) = f(x)$, so gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx,$$

und weil vermöge (20)

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx,$$

so ist

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \qquad (f(-x) = f(x)). \tag{21}$$

Ist dagegen $f(x)$ eine *ungerade* Function, so dass $f(-x) = -f(x)$, so ist

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx = -\int_0^a f(x)dx,$$

daher

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \qquad (f(-x) = -f(x)). \tag{22}$$

Hier mag noch der Übergang von bestimmten zu unbestimmten Integralen vollzogen werden; denkt man sich die obere Grenze b, also auch β variabel, so kommt man unmittelbar zu

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{19*}$$

Man kann dieser Formel auch die folgende Deutung geben: Aus jeder Integralformel lässt sich eine neue Formel

ableiten, indem x durch eine Function von x und dx durch das Differential dieser Function ersetzt wird.

So ergibt sich aus der Grundformel $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ die allgemeinere

$$\int \varphi(x)^n \varphi'(x) dx = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} + C,$$

aus $\int \frac{dx}{x} = l.x + C$ auf demselben Wege

$$\int \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)} = l.\varphi(x) + C$$

u. s. w. Mitunter lässt sich bei einem vorgelegten Integral eine solche verallgemeinerte Grundformel durch blosses Zufügen eines constanten Factors herstellen, die Integration kann dann unmittelbar vollzogen werden.

224. *Beispiele.* 1) Mit Hilfe der Grundformeln ergeben sich folgende Integrale:

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n d(ax+b) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C,$$

$$\int \cos^n x \sin x\, dx = -\int \cos^n x\, d\cos x = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \frac{d(a+x)}{a+x} = l.(a+x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a+bx)}{a+bx} = l.(a+bx)^{\frac{1}{b}} + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -l.\cos x + C,$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}\int e^{ax} d(ax) = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-\varkappa^2 x^2}} = \frac{1}{\varkappa}\int \frac{d(\varkappa x)}{\sqrt{1-(\varkappa x)^2}} = \frac{1}{\varkappa}\arcsin \varkappa x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\varkappa^2 + x^2} = \frac{1}{\varkappa}\int \frac{d\frac{x}{\varkappa}}{1+\left(\frac{x}{\varkappa}\right)^2} = \frac{1}{\varkappa}\operatorname{arctg}\frac{x}{\varkappa} + C.$$

2) Das Integral

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

verwandelt sich durch die Substitution $x = a \sin t$ in

$$a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C;$$

in dem Resultate ist t durch $\arcsin \frac{x}{a}$ und $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ durch $2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ zu ersetzen; hiernach ist

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

3) Das Integral

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

geht zunächst, wenn man unter dem Integralzeichen Zähler und Nenner durch $\cos^2 x$ dividirt, über in

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x},$$

und durch die Substitution $b \operatorname{tg} x = at$ weiter in

$$\frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} t + C;$$

demnach ist

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

4) Es ist

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = \Big\{\cos x\Big\}_\pi^0 = 2;$$

wollte man auf dieses Integral die Transformation $\sin x = t$ anwenden, so müsste dies mit einiger Vorsicht geschehen; denn während x das Intervall $(0, \pi)$ stetig durchläuft, bewegt sich t von 0 bis 1 und wieder zurück; da nun

$$dx = \frac{dt}{\cos x},$$

so ist in der ersten Hälfte von $(0, \pi)$, d. i. von 0 bis $\frac{\pi}{2}$,

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

in der zweiten Hälfte, d. i. von $\frac{\pi}{2}$ bis π,

$$dx = \frac{dt}{-\sqrt{1 - t^2}}$$

zu setzen. Hiernach ist

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_1^0 \frac{t\,dt}{-\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\left[\sqrt{1-t^2}\right]_1^0 = 2.$$

Die unvermittelte Anwendung der Formel (19) ergäbe das absurde Resultat $\int_0^0 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0$.

5) Man findet unmittelbar

$$\int_{-1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \left\{\sqrt{1+x^2}\right\}_{-1}^{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

Obwohl nun bei der Substitution $1 + x^2 = t$ die Variable t, während x das Intervall $(-1, 2)$ beschreibt, nicht in einerlei Sinn sich ändert, sondern zuerst von 2 nach 1 und dann von hier nach 5 geht, so führt doch die Formel (19) zu dem richtigen Resultate; denn für beide Abschnitte verwandelt sich

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{in} \quad \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

und es ist

$$\int_{-1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{-1}^{0} \cdots + \int_{0}^{2} \cdots$$

$$= \int_2^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} + \int_1^5 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_2^5 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left\{\sqrt{t}\right\}_2^5,$$

daher

$$\int_{-1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_2^5 \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

so, als ob t sich beständig nur in einem Sinne änderte.

Zweiter Abschnitt.

Unbestimmte Integrale.

§ 1. Integration rationaler Functionen.

225. Unter den verschiedenen Gattungen von Functionen gibt es nur eine, für welche die unbestimmte Integration theoretisch immer ausgeführt werden kann; es sind die *rationalen Functionen*. Die praktische Durchführung hängt jedoch von einer Voraussetzung ab, welche alsbald angeführt werden wird.

Jede gebrochene rationale Function kann auf die Form eines Bruches $\frac{\Phi(x)}{f(x)}$ gebracht werden, dessen Zähler und Nenner rationale ganze Functionen von x sind; man darf dabei voraussetzen, dass der Bruch *irreductibel* sei, d. h. dass Zähler und Nenner keinen gemeinsamen algebraischen Theiler haben, mit andern Worten, dass sie für keinen Wert von x gleichzeitig Null werden. Der Nenner sei vom Grade n.

Ist der Zähler von demselben oder einem höheren Grade, so lässt sich der Bruch durch wirkliche Ausführung der Division in eine ganze Function und eine echt gebrochene zerlegen, derart, dass

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)} = G(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

darin ist $F(x)$ höchstens vom Grade $n - 1$. Die Integration des vorgelegten Bruches kommt dann zurück auf die Integration einer ganzen Function und eines echten Bruches; die erste Aufgabe ist bereits erledigt (221), es erübrigt noch die zweite.

Nach den Lehren der Algebra ist jede ganze Function mit reellen Coefficienten in reelle Factoren zerlegbar, welche sich als Potenzen von ganzen Functionen des ersten und zweiten

Grades in x darstellen. Diese Zerlegung hängt mit den Nullstellen oder Wurzeln der Functionen in der Weise zusammen, dass eine einfache reelle Wurzel a zu der Zerlegung den Factor $x-a$, eine m-fache solche Wurzel den Factor $(x-a)^m$ liefert, während aus einer complexen Wurzel $\alpha+\beta i$ und der sie begleitenden conjugirten Wurzel $\alpha-\beta i$ ein quadratischer Factor x^2+px+q und aus m-fachen Wurzeln dieser Art ein Factor $(x^2+px+q)^m$ entspringt; dabei ist $p=-2\alpha$ und $q=\alpha^2+\beta^2$, so dass $\frac{p^2}{4}-q<0$ ist.

Ist nun der Nenner $f(x)$ der echtgebrochenen Function $\frac{F(x)}{f(x)}$ in seine Factoren zerlegt oder lässt sich diese Zerlegung durch Auflösung der Gleichung $f(x)=0$ bewerkstelligen — dies die Voraussetzung, unter welcher allein die praktische Ausführung der im Nachfolgenden erörterten Operationen möglich ist —, so kann $\frac{F(x)}{f(x)}$ in einfachere Brüche, welche die Factoren von $f(x)$ zu Nennern haben, aufgelöst werden, und das Integral $\int\frac{F(x)}{f(x)}dx$ erscheint auf die Integration dieser einfachen Brüche, der *Partialbrüche*, zurückgeführt.

Die Grundlage für die Zerlegung in Partialbrüche bildet der folgende Satz:

Wenn in dem irreductibeln echten Bruche $\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$ *die Factoren des Nenners keinen gemeinsamen algebraischen Theiler haben, so lässt sich dieser Bruch, und zwar nur auf eine Art, in zwei irreductible echte Brüche zerlegen, so dass*

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}=\frac{P}{\varphi(x)}+\frac{Q}{\psi(x)}; \tag{1}$$

P und Q bedeuten ganze Functionen von x.

Es sei nämlich

$$\varphi(x)=a_0x^r+a_1x^{r-1}+\cdots+a_r$$
$$\psi(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\cdots+b_s;$$

dann ist $r+s-1$ der höchstmögliche Grad der Function $F(x)$ deren allgemeine Form

$$F(x)=c_0x^{r+s-1}+c_1x^{r+s-2}+\cdots+c_{r+s-1}$$

sein wird; da $\varphi(x)$, $\psi(x)$ keine gemeinsame Wurzel haben, so ist ihre Resultante

$$
(2) \qquad A = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 \cdots\cdots a_r \cdots\cdots & 0 \\
0 & a_0 \cdots\cdots\cdots a_r \cdot & 0 \\
\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdot \\
0 & \cdots\cdot a_0 \cdots\cdots\cdots & a_r \\
b_0 & b_1 \cdots\cdots b_s \cdots\cdots & 0 \\
0 & b_0 \cdots\cdots\cdots b_s \; . & 0 \\
\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdot \\
0 & \cdots\cdot b_0 \cdots\cdots\cdots & b_s
\end{vmatrix} \lessgtr 0.
$$

Bildet man mit den drei Functionen das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
F(x) &= c_0 x^{r+s-1} + c_1 x^{r+s-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + c_{r+s-1} \\
x^{s-1}\varphi(x) &= a_0 x^{r+s-1} + a_1 x^{r+s-2} + \cdots + a_r x^{s-1} \\
x^{s-2}\varphi(x) &= \qquad\quad a_0 x^{r+s-2} + \cdots\cdots\cdots + a_r x^{s-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi(x) &= \qquad\qquad\qquad\quad a_0 x^r + \cdots\cdots\cdots + a_r \\
x^{r-1}\psi(x) &= b_0 x^{r+s-1} + b_1 x^{r+s-2} + \ldots + b_s x^{r-1} \\
x^{r-2}\psi(x) &= \qquad\quad b_0 x^{r+s-2} + \cdots\cdots\cdots + b_s x^{r-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi(x) &= \qquad\qquad\qquad\quad b_0 x^s + \cdots\cdots\cdots + b_s,
\end{aligned}
$$

das $r+s+1$ Gleichungen umfasst, so kann dasselbe in Bezug auf die rechts auftretenden Potenzen von x, d. i. x^{r+s-1}, $x^{r+s-2}, \ldots x^0$, deren Anzahl $r+s$ ist, als ein lineares, nicht homogenes System angesehen werden; sein Bestand erfordert, dass die Determinante aus den Coefficienten und den linksseitigen Gliedern identisch verschwinde, dass also

$$
\begin{vmatrix}
F(x) & c_0 & c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots c_{r+s-1} \\
x^{s-1}\varphi(x) & a_0 & a_1 \cdots\cdots a_r \cdots\cdots \; 0 \\
x^{s-2}\varphi(x) & 0 & a_0 \cdots\cdots\cdots a_r \cdots \; 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi(x) & 0 & \cdots\cdot a_0 \cdots\cdots\cdots a_r \\
x^{r-1}\psi(x) & b_0 & b_1 \cdots\cdots b_s \cdots\cdots \; 0 \\
x^{r-2}\psi(x) & 0 & b_0 \cdots\cdots\cdots b_s \cdots \; 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi(x) & 0 & \cdots\cdots b_0 \cdots\cdots\cdots b_s
\end{vmatrix} = 0
$$

sei.

Entwickelt man links nach den Elementen der ersten Colonne, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$(3)\qquad \begin{cases} AF(x) + (B_1x^{s-1} + B_2x^{s-2} + \cdots + B_s)\varphi(x) \\ + (A_1x^{r-1} + A_2x^{r-2} + \cdots + A_r)\psi(x) = 0; \end{cases}$$

darin bedeuten $A, B_1, \ldots B_s, A_1, \ldots A_r$ die Unterdeterminanten, welche den Elementen der ersten Colonne conjugirt sind, also durchwegs constante Grössen, deren erste laut (2) von Null verschieden ist. Aus (3) aber drückt sich $\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$ wie folgt aus

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)} = \dfrac{\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \cdots + \alpha_r}{\varphi(x)} \\ \qquad + \dfrac{\beta_1 x^{s-1} + \beta_2 x^{s-2} + \cdots + \beta_s}{\psi(x)}. \end{cases}$$

Dass die beiden Brüche rechts irreductibel sind, erkennt man aus (3); hätten nämlich $\alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r$ und $\varphi(x)$, also auch $A_1 x^{r-1} + \cdots + A_r$ und $\varphi(x)$, einen gemeinsamen Theiler, so wäre dieser vermöge (3) auch Theiler von $F(x)$ — gegen die vorausgesetzte Irreductibilität von $\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$.

Hiermit ist der obige Satz im ganzen Umfange bewiesen.

Die wirkliche Zerlegung kann auf dem eben bezeichneten Wege mit Zuhilfenahme des Satzes der unbestimmten Coefficienten (88) erfolgen. Nachdem man nämlich den Ansatz (4) gebildet, befreie man ihn von den Nennern und vergleiche in

$$F(x) = (\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \cdots + \alpha_r)\psi(x)$$
$$+ (\beta_1 x^{s-1} + \beta_2 x^{s-2} + \cdots + \beta_s)\varphi(x)$$

die Coefficienten gleicher Potenzen links und rechts; dadurch ergibt sich die gerade nothwendige Anzahl von $r + s$ linearen Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten

$$\alpha_1 \ldots \alpha_r,\ \beta_1 \ldots \beta_s.$$

Aus dem obigen Satze lässt sich der folgende ableiten: *Der irreductible echte Bruch* $\frac{F(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)}$, *in welchem keine zwei Factoren des Nenners einen gemeinsamen Theiler haben, lässt sich nur auf eine Art in eine Summe irreductibler echter Brüche mit den Nennern* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\sigma(x)$ *auflösen.*

Es ist nämlich auf Grund von (1)

$$\frac{F(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)} = \frac{P_1}{\varphi_1(x)} + \frac{Q_1}{\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)}$$

$$\frac{Q_1}{\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)} = \frac{P_2}{\varphi_2(x)} + \frac{Q_2}{\varphi_3(x)\cdots\varphi_\sigma(x)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{Q_{\sigma-2}}{\varphi_{\sigma-1}(x)\varphi_\sigma(x)} = \frac{P_{\sigma-1}}{\varphi_{\sigma-1}(x)} + \frac{P_\sigma}{\varphi_\sigma(x)}$$

und daraus ergibt sich durch Addition

$$\frac{F(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)} = \frac{P_1}{\varphi_1(x)} + \frac{P_2}{\varphi_2(x)} + \cdots + \frac{P_\sigma}{\varphi_\sigma(x)}. \tag{5}$$

226. Eine *einfache reelle Wurzel* a des Nenners von $\frac{F(x)}{f(x)}$ gibt zu folgender Zerlegung Anlass: Es ist

$$f(x) = (x - a)\varphi(x) \tag{6}$$

und

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{P}{\varphi(x)}; \tag{7}$$

dabei bedeutet A eine ganze Function 0-ten Grades, also eine Constante, und ist P von niedrigerem Grade als $\varphi(x)$. Um A zu finden, setze man in der von Brüchen befreiten Gleichung

$$F(x) = A\varphi(x) + P(x - a)$$

$x = a$ und erhält, da sowohl $F(a) \lessgtr 0$ wie $\varphi(a) \lessgtr 0$ ist, den völlig bestimmten Wert

$$A = \frac{F(a)}{\varphi(a)}. \tag{8}$$

Zu einer andern Darstellung des Zählers A führt die Gleichung (6); differentiirt man dieselbe, so kommt

$$f'(x) = \varphi(x) + (x - a)\varphi'(x)$$

und daraus folgt $f'(a) = \varphi(a)$; daher ist nach (8) auch

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}. \tag{9}$$

Besitzt der Nenner *nur* einfache reelle Wurzeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ und macht man die Voraussetzung, der Coefficient der höchsten Potenz sei die Einheit*), dann gilt

*) Im andern Falle denke man sich diesen Coefficienten vor das Integralzeichen gehoben.

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

und

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

Zur Bestimmung der Zähler führen verschiedene Wege; entweder setzt man in der von den Brüchen befreiten Gleichung der Reihe nach $x = a_1, a_2, \ldots a_n$ und erhält in derselben Reihenfolge $A_1, A_2, \ldots A_n$, oder man vergleicht in derselben Gleichung die Coefficienten gleicher Potenzen von x zu beiden Seiten und findet n lineare Gleichungen mit $A_1, A_2, \ldots A_n$ als Unbekannten, oder endlich man stützt sich auf Formel (9) und erhält

$$A_\varkappa = \frac{F(a_\varkappa)}{f'(a_\varkappa)}.$$

Für die Integration von Partialbrüchen der hier vorliegenden Gestalt $\frac{A}{x - a}$ gilt die Formel

$$(10) \qquad \int \frac{A\,dx}{x - a} = A \int \frac{d\,(x - a)}{x - a} = A\,l.(x - a).$$

227. *Beispiele.* 1) Zur Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{dx}{(x - a)(x - b)}$$

hat man die Zerlegung

$$\frac{1}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}$$

vorzunehmen; nach Beseitigung der Brüche hat man

$$1 = A(x - b) + B(x - a)$$

und findet daraus durch die Substitutionen $x = a$ und $x = b$

$$A = \frac{1}{a - b} = -B;$$

daher ist

$$\int \frac{dx}{(x - a)(x - b)} = \frac{1}{a - b}\,l.\frac{x - a}{x - b} + C.$$

Insbesondere gilt hiernach die Formel

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\,l.\frac{x - a}{x + a} + C.$$

2) Es sei das Integral $\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$ zu ermitteln. Man hat hierzu die Zerlegung

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2};$$

wird der Zähler der linken Seite mit $F(x)$, der Nenner mit $f(x)$ bezeichnet, so ist

$$f'(x)=4x^3-10x$$

und

$$A=\frac{F(1)}{f'(1)}=-\frac{1}{3},\quad B=\frac{F(-1)}{f'(-1)}=\frac{1}{3},\quad C=\frac{F(2)}{f'(2)}=\frac{5}{12},$$

$$D=\frac{F(-2)}{f'(-2)}=-\frac{5}{12}.$$

Demnach ist

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{1}{3}\,l.\frac{x+1}{x-1}+\frac{5}{12}\,l.\frac{x-2}{x+2}+C$$

$$=\frac{1}{12}\,l.\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^5+C.$$

3) Um das Integral

$$\int\frac{(360x^2-106x-17)\,dx}{24x^3-10x^2-3x+1}$$

zu bestimmen, hat man zunächst die cubische Gleichung

$$24x^3-10x^2-3x+1=0$$

aufzulösen; ihre Wurzeln sind $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, daher setze man

$$\frac{360x^2-106x-17}{24x^3-10x^2-3x+1}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3x+1}+\frac{C}{4x-1}.$$

Nach Beseitigung der Nenner lautet diese Gleichung

$$360x^2-106x-17=A(3x+1)(4x-1)+B(4x-1)(2x-1)$$
$$+C(2x-1)(3x+1),$$

und die Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von x führt auf

$$360=12A+8B+6C$$
$$-106=A-6B-C$$
$$-17=-A+B-C;$$

daraus berechnet sich

$$A=8,\qquad B=15,\qquad C=24.$$

Folglich ist

$$\int\frac{(360x^2-106x-17)\,dx}{24x^3-10x^2-3x+1}$$
$$=4\,l.(2x-1)+5\,l.(3x+1)+6\,l.(4x-1)+C'$$
$$=l.(2x-1)^4(3x+1)^5(4x-1)^6+C'.$$

228. Eine *m-fache reelle Wurzel a* des Nenners von $\frac{F(x)}{f(x)}$ führt zu folgender Zerlegung. Zunächst ist

$$f(x)=(x-a)^m\varphi(x),$$

weiter nach dem allgemeinen Satze in **225**

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^m}+\frac{Q}{\varphi(x)},$$

wobei $P(x)$ als Function $\overline{m-1}$-ten Grades die Form hat

$$P(x)=\alpha_1x^{m-1}+\alpha_2x^{m-2}+\cdots+\alpha_m.$$

Nun kann $P(x)$ auch nach Potenzen des Binoms $x-a$ entwickelt werden; entweder mit Hilfe der Formel

$$P(x)=P(a+(x-a))$$
$$=P(a)+\frac{P'(a)}{1}(x-a)+\frac{P''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{P^{(m-1)}(a)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}(x-a)^{m-1}$$

oder aber dadurch, dass man $x=z+a$ setzt und $P(z+a)$ mittels der Binomialformel ausführt; es ergibt sich so

$$P(x)=P(z+a)=A_1z^{m-1}+A_2z^{m-2}+\cdots+A_m$$
$$=A_1(x-a)^{m-1}+A_2(x-a)^{m-2}+\cdots+A_m.$$

Auf Grund der letzteren Darstellung hat man dann

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{Q}{\varphi(x)}. \tag{11}$$

Eine m-fache reelle Wurzel des Nenners gibt hiernach im Allgemeinen Anlass zu m Partialbrüchen, deren einer die früher schon behandelte Form $\frac{A_1}{x-a}$ hat und ein logarithmisches Integral liefert, während die andern von der Gestalt $\frac{A_r}{(x-a)^r}$ sind und das algebraische Integral

$$(12) \qquad A_r \int \frac{dx}{(x-a)^r} = -\frac{A_r}{(r-1)(x-a)^{r-1}}$$

ergeben.

Weil $\frac{P(x)}{(x-a)^m}$ irreductibel ist, so besitzt $P(x)$ den Factor $(x-a)$ nicht und ist daher nothwendig $A_m \gtrless 0$; dagegen können mehrere von den übrigen Zählern oder auch alle Null sein. Von den Partialbrüchen ist also jener mit dem höchsten Nenner, $\frac{A_m}{(x-a)^m}$, immer vorhanden.

229. *Beispiele.* 1) Für das Integral $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x+2)^3}$ gilt das Zerlegungsschema

$$\frac{x^2-1}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3};$$

nach Beseitigung der Nenner hat man zur Bestimmung der Zähler die Gleichung

$$x^2 - 1 = A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3.$$

Nun ist aber andererseits

$$x^2 - 1 = (\overline{x+2} - 2)^2 - 1 = (x+2)^2 - 4(x+2) + 3,$$

daher

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = -4, \qquad A_3 = 3.$$

Die Vollziehung der Integration gibt

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x+2)^3} = l.(x+2) + \frac{4}{x+2} - \frac{3}{2(x+2)^2} + C$$

$$= \frac{8x+13}{2(x+2)^2} + l.(x+2) + C.$$

2) Die zur Entwicklung des Integrals

$$\int \frac{(x^2-2)dx}{x^3(x+2)^2}$$

nothwendige Zerlegung kann in verschiedener Weise vorgenommen werden.

Will man zunächst die von dem Factor x^3 herrührenden Partialbrüche ermitteln, so setze man

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{P}{(x+2)^2}$$

und multiplicire mit x^3; dann zeigt die Gleichung

$$\frac{x^2-2}{(x+2)^2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \frac{Px^3}{(x+2)^2},$$

dass man nur den Quotienten $\frac{x^2-2}{(x+2)^2}$ nach steigenden Potenzen von x bis zur zweiten einschliesslich zu entwickeln brauche, um A_0, A_1, A_2 zu erhalten; nun ist

$$(-2+x^2):(4+4x+x^2) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{8(x+2)^2},$$

folglich

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = -\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x} + \frac{x}{8(x+2)^2};$$

es erübrigt nur noch die Zerlegung von $\frac{P}{(x+2)^2} = \frac{x}{8(x+2)^2}$ nach den Regeln von **228** und man hat endgiltig

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = -\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{8(x+2)} - \frac{1}{4(x+2)^2}.$$

Es hätte aber auch der folgende Weg eingeschlagen werden können. Aus dem vollständigen Schema

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_0}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2}$$

folgt

$$x^2 - 2 = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)(x+2)^2 + [B_0 + B_1(x+2)]x^3,$$

und die Vergleichung der Coefficienten links und rechts gibt

$$\begin{aligned} 0 &= A_2 + B_1 \\ 0 &= A_1 + 4A_2 + B_0 + 2B_1 \\ 1 &= A_0 + 4A_1 + 4A_2 \\ 0 &= 4A_0 + 4A_1 \\ -2 &= 4A_0; \end{aligned}$$

daraus berechnet sich

$$A_0 = -\frac{1}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{8}; \quad B_0 = -\frac{1}{4}, \quad B_1 = \frac{1}{8}$$

wie oben.

Man hat demnach

$$\int \frac{(x^2-2)\,dx}{x^3(x+2)^2} = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8} l.x + \frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{8} l.(x+2) + C$$

$$= \frac{2-3x-x^2}{4x^2(x+2)} + \frac{1}{8} l.\frac{x+2}{x} + C.$$

230. Ein Paar *einfacher conjugirt complexer Wurzeln* des Nenners von $\frac{F(x)}{f(x)}$ führt dem allgemeinen Satze zufolge auf einen Partialbruch von der Form

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}, \quad \text{worin} \quad \frac{p^2}{4}-q<0.$$

Zum Zwecke der Integration dieses Partialbruches transformire man den linearen Zähler $ax+b$ derart, dass er den Differentialquotienten $2x+p$ des Nenners enthalte; in der That gilt identisch

$$ax+b=\frac{a}{2}\left(2x+p+\frac{2b}{a}-p\right)=\frac{a}{2}(2x+p)+\left(b-\frac{ap}{2}\right).$$

Darum ist

$$(13)\left\{\begin{aligned}\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx&=\frac{a}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}\\&=\frac{a}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}\\&=\frac{a}{2}l.(x^2+px+q)+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.\end{aligned}\right.$$

Es bleibt also noch die Durchführung der Integration

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

zu erledigen; diese gelingt durch Umwandlung des Nenners in die Summe zweier Quadrate, indem nämlich

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$

ist; vermöge dieser Darstellung hat man

$$(14)\left\{\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2+px+q}&=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{d\,\dfrac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{1+\left(\dfrac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.\end{aligned}\right.$$

Trägt man dies in (13) ein, so ergibt sich für den jetzt vorliegenden Partialbruch das Integral

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx \\ &= \frac{a}{2}\,l.\,(x^2+px+q) + \frac{b-\frac{ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}. \end{aligned}\right.$$

231. *Beispiele.* 1) Es sei das Integral

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-1}$$

zu bestimmen.

Die reelle Zerlegung des Nenners ist

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

daher die des Bruches

$$\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Daraus folgt

$$x^2+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

und nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten

$$A=\frac{2}{3},\qquad B=\frac{1}{3},\qquad C=-\frac{1}{3};$$

der zweite Partialbruch gestaltet sich weiter wie folgt um:

$$\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}\,\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{6}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{6}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}.$$

Demnach ist

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-1}$$

$$=\frac{2}{3}\,l.\,(x-1)+\frac{1}{6}\,l.\,(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2) Um das Integral

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+x^2+1}$$

zu entwickeln, hat man vor allem den Nenner in seine einfachsten reellen Factoren zu zerlegen; da reelle Wurzeln nicht

vorhanden sind, so werden die Factoren quadratisch sein, und weil die dritte und erste Potenz fehlt, die zweite aber einen positiven Coefficienten hat, wird der Ansatz die Form haben

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1)(x^2 - \alpha x + 1);$$

die Vergleichung der zweiten Potenzen beiderseits zeigt, dass $-\alpha^2 + 2 = 1$, also $\alpha = 1$ ist.

Mithin ergibt sich für die gebrochene Function die Zerlegung

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1};$$

nach Wegschaffung der Nenner hat man

$$x^2 + 1 = (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$$

und hieraus mittels des Satzes der unbestimmten Coefficienten

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 1 &= -A + C + B + D \\ 0 &= A + C - B + D \\ 1 &= B + D, \end{aligned}$$

woraus sich berechnet

$$A = C = 0, \qquad B = D = \frac{1}{2}.$$

Nun kann die Integration vollzogen werden und gibt

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{4x}{\sqrt{3}}}{1-\frac{4x^2-1}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C.$$

232. Ein Paar *m-facher, conjugirt complexer Wurzeln* des Nenners von $\frac{F(x)}{f(x)}$ hat einen Partialbruch von der allgemeinen Form

$$\frac{P}{(x^2+px+q)^m}, \quad \text{wo } \frac{p^2}{4} - q < 0,$$

zur Folge, wobei P eine ganze Function höchstens vom Grade $2m - 1$ bedeutet.

Die Integration eines solchen Partialbruches vollzieht sich am einfachsten mit Hilfe des folgenden Satzes.

Es lassen sich, und zwar nur auf eine Art, zwei ganze Functionen Q, R, die erste vom Grade $2m - 3$, die zweite vom Grade 1, bestimmen derart, dass

$$\frac{P}{(x^2+px+q)^m} = D_x \frac{Q}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{R}{x^2+px+q}. \tag{16}$$

Führt man nämlich rechts die Differentiation aus, so wird dieser Behauptung zufolge

$$\frac{P}{(x^2+px+q)^m}$$
$$= \frac{(x^2+px+q)^{m-1}Q' - (m-1)(x^2+px+q)^{m-2}(2x+p)Q}{(x^2+px+q)^{2m-2}}$$
$$+ \frac{R}{x^2+px+q};$$

schafft man die Nenner fort, so ergibt sich weiter die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} P = (x^2+px+q)Q' - (m-1)(2x+p)Q \\ + (x^2+px+q)^{m-1}R. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Die nach Potenzen von x geordnete rechte Seite enthält die $2m - 2$ Coefficienten von Q und die 2 Coefficienten von R, im ganzen also $2m$ Unbekannte. Wendet man aber auf (17) den Satz der unbestimmten Coefficienten an, so ergeben sich, da (im Allgemeinen) beide Seiten vom Grade $2m - 1$ sind, gerade $2m$ Gleichungen zur Bestimmung der $2m$ Unbekannten, welche Gleichungen, da sie linear sind bezüglich der Unbekannten, zu einer eindeutigen Bestimmung derselben führen.

Ist die Zerlegung (16) vollzogen, so liefert die Integration

$$\int \frac{P\,dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{Q}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \int \frac{R\,dx}{x^2+px+q}, \tag{18}$$

also einen algebraischen Theil und ein Integral, daß nach den Formeln von **230** zu bestimmen ist und im Allgemeinen einen logarithmischen und einen cyklometrischen Antheil liefert.

Hiermit sind alle Fälle, die bei rationalen Functionen auftreten können, erledigt; die Untersuchungen zeigen, dass die Integration solcher Functionen auf drei Gattungen von Functionen führt: auf *rationale, logarithmische* und *cyklometrische Functionen.*

233. *Beispiele.* 1) In dem Integrale

$$\int \frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

hat die zu integrirende Function unmittelbar die in **232** vorausgesetzte Form, und es ist

$$P = x(2x^2 - x + 5), \quad x^2 + px + q = x^2 + 1;$$
$$Q = Ax + B, \quad R = Cx + D;$$

demnach lautet die zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D dienliche Gleichung (17)

$$x(2x^2 - x + 5) = (x^2+1)A - 2x(Ax+B) + (x^2+1)(Cx+D);$$

sie führt zu den Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} C &= 2 \\ -A + D &= -1 \\ -2B + C &= 5 \\ A + D &= 0 \end{aligned}$$

und aus diesen berechnet sich

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{2}; \quad C = 2, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

Dadurch ist die Zerlegung

$$\frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} D_x \frac{x-3}{x^2+1} + \frac{2x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

bestimmt und die Integration ergibt

$$\int \frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x-3}{2(x^2+1)} + l.(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

2) Zur Entwicklung des Integrals

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$$

führe man zuerst die allgemeine Zerlegung auf Grund der Sätze in **225** aus nach dem Schema

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{ax^2 + bx + c}{x^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{fx^3 + gx^2 + hx + j}{(x^2+1)^2};$$

zum Behufe der Bestimmung der acht Coefficienten $a, b, \ldots j$ wende man auf die von den Brüchen befreite Gleichung den Satz der unbestimmten Coefficienten an; dadurch ergeben sich die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= \quad a + d + f \\
0 &= -2a + b - 2f + g \\
0 &= \quad 2a - 2b + c + 2d - 2g + h \\
0 &= -4a + 2b - 2c - 2h + j \\
1 &= \quad a - 4b + 2c + d - 2j \\
0 &= -2a + b - 4c \\
-2 &= -2b + c \\
1 &= -2c
\end{aligned}
$$

und ihre Auflösung liefert

$$a = \frac{11}{8}, \quad b = \frac{3}{4}, \quad c = -\frac{1}{2}; \quad d = \frac{1}{40};$$

$$f = -\frac{7}{5}, \quad g = -\frac{4}{5}, \quad h = -\frac{12}{5}, \quad j = -\frac{9}{5}.$$

Nun bleibt noch die Zerlegung des dritten Partialbruches

$$\frac{fx^3 + gx^2 + hx + j}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{5}\,\frac{7x^3 + 4x^2 + 12x + 9}{(x^2+1)^2}$$

nach den Regeln des vorigen Artikels vorzunehmen; es ist $\left(\text{mit Weglassung des Factors } -\frac{1}{5}\right)$

$$\frac{7x^3 + 4x^2 + 12x + 9}{(x^2+1)^2} = D_x \frac{Ax + B}{x^2+1} + \frac{Cx + D}{x^2+1};$$

daraus ergibt sich nach Ausführung der Differentiation und Beseitigung der Nenner

$$
\begin{aligned}
&7x^3 + 4x^2 + 12x + 9 \\
&= (x^2+1)A - 2x(Ax + B) + (x^2+1)(Cx + D);
\end{aligned}
$$

aus der Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten entspringen die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
7 &= \quad C \\
4 &= -A + D \\
12 &= -2B + C \\
9 &= \quad A + D,
\end{aligned}
$$

woraus

$$A = \frac{5}{2}, \quad B = -\frac{5}{2}; \quad C = 7, \quad D = \frac{13}{2}.$$

Die endgiltige Zerlegung lautet demnach

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{11}{8x} + \frac{3}{4x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{40(x-2)} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} D_x \frac{5(x-1)}{x^2+1} + \frac{7x + \frac{13}{2}}{x^2+1}\right);$$

nun kann die Integration ohne weitere Rechnung vollzogen werden und ergibt

$$\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)} dx = \frac{11}{8} l.x - \frac{3}{4x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{40} l.(x-2)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{7}{10} l.(x^2+1) - \frac{13}{10} \operatorname{arctg} x + C$$

$$= -\frac{5x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{4x^2(x^2+1)} + \frac{1}{40} l. \frac{x^{55}(x-2)}{(x^2+1)^{28}} - \frac{13}{10} \operatorname{arctg} x + C.$$

3) Bei der Entwicklung des Integrals

$$\int \frac{x^m dx}{(1+x^2)^n}, \tag{19}$$

worin m, n positive ganze Zahlen bedeuten sollen, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist m eine *ungerade Zahl*, $m = 2p + 1$, so setze man $x^2 = t$, woraus $x dx = \frac{dt}{2}$ folgt, und erhält

$$\int \frac{x^{2p+1} dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{t^p dt}{(1+t)^n}; \tag{20}$$

das rechtsstehende Integral fällt aber unter die Regeln von **228**, und nachdem es durchgeführt ist, bleibt nur t durch x^2 zu ersetzen.

Hiernach ist beispielsweise

$$\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{2} l.(1+t) + \frac{1}{2(1+t)} + C$$

$$= \frac{1}{2} l.(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

Ist m eine *gerade Zahl*, $m = 2p$, so entwickle man x^{2p} nach Potenzen von $1 + x^2$; das Schema hierfür ist

$$x^{2p} = (\overline{1 + x^2} - 1)^p = (1+x^2)^p - \binom{p}{1}(1+x^2)^{p-1}$$

$$+ \binom{p}{2}(1+x^2)^{p-2} - \cdots + (-1)^p;$$

dann ist, weil $2p < n$, also umsomehr $p < n$ vorausgesetzt werden kann,

$$(21)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{x^{2p}\,dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-p}} - \binom{p}{1} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-p+1}} \\ \displaystyle\quad + \binom{p}{2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-p+2}} - \cdots + (-1)^p \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}. \end{cases}$$

Die Integrale der rechten Seite können nach der in **232** entwickelten Methode behandelt werden.

Sie lassen sich aber auch durch das folgende Verfahren auf ein Grundintegral, nämlich auf

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

zurückführen. Zunächst ist

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^r} = \int \frac{(1+x^2-x^2)\,dx}{(1+x^2)^r} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^r};$$

wendet man auf das zweite Glied der rechten Seite partielle Integration an, $u = x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^r}$ setzend, so wird

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^r} = -\frac{x}{2(r-1)(1+x^2)^{r-1}} + \frac{1}{2(r-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}};$$

demnach ist weiter

$$(22)\quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^r} = \frac{x}{2(r-1)(1+x^2)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}}.$$

Durch successive Anwendung dieser bis $r = 2$ giltigen Reductionsformel kommt man bei positivem ganzen r schliesslich auf das oben erwähnte Grundintegral zurück.

Um z. B. das Integral

$$\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^5}$$

zu ermitteln, setze man $x^4 = (1 + x^2 - 1)^2 = (1+x^2)^2 - 2(1+x^2) + 1$, und nun findet man zuerst

$$\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^5} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} - 2 \int \frac{dx}{(1+x^2)^4} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^5};$$

nach (22) aber ist

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^5} = -\frac{x}{8(1+x^2)^4} + \frac{7}{8} \int \frac{dx}{(1+x^2)^4},$$

daher

$$\int \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^5} = -\frac{x}{8(1+x^2)^4} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^5} - \frac{9}{8}\int \frac{dx}{(1+x^2)^4};$$

weiter

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4} = -\frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{(1+x^2)^3},$$

also

$$\int \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^5} = -\frac{x}{8(1+x^2)^4} + \frac{3x}{16(1+x^2)^3} + \frac{1}{16}\int \frac{dx}{(1+x^2)^3};$$

schliesslich

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = -\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}\right),$$

mithin endgiltig

$$\int \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^5} = -\frac{x}{8(1+x^2)^4} + \frac{3x}{16(1+x^2)^3}$$

$$-\frac{x}{64(1+x^2)^2} - \frac{3x}{128(1+x^2)} + \frac{3}{128}\operatorname{arctg} x + C$$

$$= \frac{(3+11x^2-11x^4-3x^6)x}{128(1+x^2)^4} + \frac{3}{128}\operatorname{arctg} x + C.$$

§ 2. Integration irrationaler Functionen.

234. Ein sehr umfassendes Problem der Integral-Rechnung besteht in der Untersuchung von Integralen der Form

$$\int f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

wo $f(x, y)$ eine *rationale* Function der Argumente x, y bedeutet, y selbst aber als Function von x durch eine algebraische Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

bestimmt ist, also eine *algebraische* Function von x im allgemeinsten Sinne darstellt (13, I.).

Ist die Gleichung (2) in Bezug auf y von höherem als dem ersten Grade, so ist y eine *irrationale* Function von x; gerade dieser Fall kommt jetzt in Betracht.

Aber nur bei wenigen besonderen Formen der Gleichung (2) ist es möglich, das Integral (1) mit Hilfe der elementaren

Functionen in einer beschränkten Anzahl von Verbindungen derselben darzustellen. Eine solche Darstellung gelingt nämlich nur dann, wenn das Differential $f(x, y)dx$ durch Transformation der Variabeln sich auf ein rationales Differential zurückführen lässt.

Die in den Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik auftretenden Integrale irrationaler Functionen sind häufig solcher Art, und sollen nun die wichtigsten Formen derselben betrachtet werden.

235. Ist die Gleichung, welche y als Function von x bestimmt, in Bezug auf x vom ersten Grade, hat sie also die Form

$$(3) \qquad (a'x + b')\varphi(y) + ax + b = 0 \qquad \left(\frac{a}{a'} \gtrless \frac{b}{b'}\right),$$

wobei $\varphi(y)$ eine ganze Function mindestens des zweiten Grades bedeutet, so wird das Ziel dadurch erreicht, dass man in dem Integral (1) y als Integrationsvariable einführt; (3) gibt nämlich

$$(4) \qquad x = -\frac{b'\varphi(y) + b}{a'\varphi(y) + a},$$

daher auch dx als rationale Function von y, und somit verwandelt sich durch die Substitution (4) $f(x, y)dx$ in ein rationales Differential in y.

Die einfachsten Fälle dieser Art sind die folgenden.

1) Die Gleichung (3) ergebe

$$x = y^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl ist; dann folgt wegen

$$dx = ny^{n-1}dy$$

$$(5) \qquad \int f\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx = n\int f(y^n, y)y^{n-1}dy.$$

2) Aus der Gleichung (3) folge

$$ax + b = y^n;$$

dann ist $dx = \frac{ny^{n-1}dy}{a}$, daher

$$(6) \qquad \int f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx = \frac{n}{a}\int f\left(\frac{y^n - b}{a}, y\right) y^{n-1}dy.$$

3) Liefert die Gleichung (3) eine Lösung von der Form

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} = y^n,$$

so ergibt sich

$$x = \frac{b'y^n - b}{a - a'y^n}$$

und

$$dx = \frac{ab' - a'b}{(a - a'y^n)^2} ny^{n-1} dy;$$

demnach ist

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{a'x + b}}\right) dx \\ & = n(ab' - a'b) \int f\left(\frac{b'y^n - b}{a - a'y^n}, y\right) \frac{y^{n-1} dy}{(a - a'y^n)^2}. \end{aligned} \right.$$

In allen drei Fällen ist unter der n-ten Wurzel eine *bestimmte* Lösung der betreffenden Gleichung zu verstehen und auch durchgehends beizubehalten.

236. *Beispiele.* 1) Bei dem Integrale

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x} - 1}$$

handelt es sich um eine rationale Function von $\sqrt[6]{x}$, man setzt also

$$x = y^6, \quad \text{woraus} \quad dx = 6y^5 dy,$$

und findet

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x} - 1} = 6 \int \frac{y^7 dx}{y^3 - 1};$$

nun ist (226, 230)

$$\frac{y^7}{y^3 - 1} = y^4 + y + \frac{1}{3(y - 1)} - \frac{y - 1}{3(y^2 + y + 1)},$$

daher

$$\int \frac{y^7 dy}{y^3 - 1} = \frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3} l.(y - 1) - \frac{1}{6} l.(y^2 + y + 1)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y + 1}{\sqrt{3}} + C$$

und

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x} - 1}$$
$$= 6\left[\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \frac{1}{6} l. \frac{(\sqrt[6]{x} - 1)^2}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{3}}\right] + C.$$

2) Um das Integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1-x}}$$

zu entwickeln, setze man

$$1 - x = y^3, \quad \text{woraus} \quad x = 1 - y^3, \quad dx = -3y^2 dy;$$

es ist dann

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1-x}} = 3\int \frac{y\,dy}{y^3 - 1} = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{y-1}{y^2+y+1}\right) dy$$

$$= l.(y-1) - \frac{1}{2} l.(y^2 + y + 1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= l.\left(\sqrt[3]{1-x} - 1\right) - \frac{1}{2} l.\left(\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + 1\right)$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-x} + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Behufs Bestimmung des Integrals

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$$

hat man die Substitution

$$\frac{1-x}{1+x} = y^2$$

zu benützen, woraus

$$x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \qquad dx = -\frac{4y\,dy}{(1+y^2)^2}$$

folgt. Mithin ist

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = -4\int \frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)} dy;$$

nimmt man die Zerlegung der gebrochenen Function nach den Regeln von **226** und **230** vor, so kommt

$$\int \frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)} dy = \frac{1}{4} l.\frac{1+y}{1-y} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y;$$

daher ist schliesslich

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = l.\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

237. Eine sehr wichtige Gattung von Integralen irrationaler Functionen entspringt aus der Annahme, dass y als Function von x durch die Gleichung

(8) $$y^2 = ax^2 + 2bx + c$$

bestimmt ist; dann bezieht sich das Integral

(9) $$\int f(x, y)dx$$

auf eine rationale Function von x und einer Quadratwurzel aus einer ganzen Function zweiten Grades; der Fall $a = 0$ kann nämlich ausgeschlossen werden, weil er bereits unter **235**, 2) erledigt ist. Die Quadratwurzel, welche für y gesetzt wird, ist durch die ganze Rechnung mit einem und demselben Vorzeichen beizubehalten.

Als rationale Function hat $f(x, y)$ im allgemeinsten Falle die Form eines Bruches aus zwei ganzen Functionen von x, y; da die geraden Potenzen von y rational, die ungeraden aber als Product aus einer geraden Potenz und y darstellbar sind, so kommt schliesslich

$$f(x, y) = \frac{M + Ny}{M' + N'y}$$

als Ausgangsform zu betrachten, wobei M, N, M', N' ganze Functionen von x bedeuten.

Macht man den Nenner rational, so wird

$$\frac{M + Ny}{M' + N'y} = \frac{(M + Ny)(M' - N'y)}{M'^2 - N'^2y^2}$$

$$= \frac{MM' - NN'y^2}{M'^2 - N'^2y^2} + \frac{(M'N - MN')y^2}{M'^2 - N'^2y^2} \cdot \frac{1}{y},$$

also schliesslich

$$f(x, y) = P + \frac{Q}{y},$$

wobei P und Q rationale Functionen von x bezeichnen.

Demnach ist das vorgelegte Integral

(10) $$\int f(x, y)dx = \int P\,dx + \int \frac{Q\,dx}{y}$$

auf das Integral einer rationalen Function P, das als erledigt zu betrachten ist, und auf ein neues Integral $\int \frac{Q\,dx}{y}$ zurückgeführt, in welchem die Irrationalität lediglich auf den Nenner beschränkt ist.

Die rationale Function Q im Zähler kann wieder, wenn man den allgemeinsten Fall ins Auge fasst, als Aggregat aus

einer ganzen Function $G(x)$ und einer irreductibeln echt gebrochenen Function $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ dargestellt werden, so dass die Berechnung des Integrals (9) zurückkommt auf die beiden irrationalen Integrale

$$\int \frac{G(x)}{y}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{F(x)}{\varphi(x)}\frac{dx}{y}. \tag{11}$$

Diese Integrale aber lassen sich auf ein gemeinsames Grundintegral, nämlich auf

$$\int \frac{dx}{y} \tag{12}$$

zurückführen; der Process dieser Zurückführung soll im folgenden Artikel, für das zweite der Integrale (11) mit einer Einschränkung, vorgetragen werden.

238. Für das erste der Integrale (11) gilt der folgende Satz: *Ist die ganze Function $G(x)$ vom Grade m, so kann, und nur auf eine Weise, eine ganze Function $G_1(x)$ vom Grade $m-1$ und eine Constante A derart bestimmt werden, dass*

$$\frac{G(x)}{y} = D_x\{G_1(x)y\} + \frac{A}{y} \tag{13}$$

ist.

Führt man die Differentiation aus, so geht (13) über in

$$\frac{G(x)}{y} = G_1'(x)y + \frac{G_1(x)(ax+b)}{y} + \frac{A}{y}$$

und nach Beseitigung der Nenner in

$$G(x) = G_1'(x)(ax^2+2bx+c) + G_1(x)(ax+b) + A; \tag{14}$$

beide Theile dieser Gleichung sind nach Ausführung der angezeigten Operationen ganze Functionen von x des Grades m; vergleicht man also die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x links und rechts, so ergeben sich zur Berechnung der m Coefficienten von $G_1(x)$ und von A die gerade erforderlichen $m+1$ Gleichungen, welche, da sie in Bezug auf die genannten Grössen linear sind, eine eindeutige Bestimmung für dieselben ermöglichen.

Sind $G_1(x)$ und A auf Grund von (14) ermittelt, so liefert die Gleichung (13)

$$\int \frac{G(x)}{y}\,dx = G_1(x)y + A\int \frac{dx}{y}, \tag{15}$$

wodurch thatsächlich das linksstehende Integral auf das Grundintegral (12) zurückgeführt erscheint.

Behufs Ausrechnung des zweiten Integrals (11) liegt es nahe, die echtgebrochene Function $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ in ihre Partialbrüche und dadurch das Integral in einfachere Integrale aufzulösen. Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung einer einfachen reellen und einer m-fachen reellen Wurzel $\varkappa$ des Nenners $\varphi(x)$, von der wir voraussetzen, sie sei nicht auch zugleich Wurzel des Trinoms $y^2 = ax^2 + 2bx + c$, so dass $a\varkappa^2 + 2b\varkappa + c \gtrless 0$ ist.

Ist $\varkappa$ eine einfache Wurzel, so liefert es einen Partialbruch von der Gestalt $\frac{A}{x - \varkappa}$ mit constantem Zähler (226) und zu dem Integrale $\int \frac{F(x)}{\varphi(x)} \frac{dx}{y}$ den Bestandtheil

$$A \int \frac{dx}{(x - \varkappa) y}; \tag{16}$$

ist dagegen $\varkappa$ eine m-fache Wurzel von $\varphi(x)$, so gibt es einen Partialbruch $\frac{R(x)}{(x - \varkappa)^m}$, dessen Zähler eine ganze Function $\overline{m - 1}$-ten Grades ist, und liefert zu dem Integrale den Bestandtheil

$$\int \frac{R(x)}{(x - \varkappa)^m y} dx; \tag{17}$$

dieses Integral aber lässt sich auf das vorige, (16), zurückführen mit Hilfe des folgenden Satzes:

Man kann, und nur auf eine Weise, eine ganze Function $R_1(x)$ vom Grade $m - 2$ und eine Constante A bestimmen derart, dass für alle Werte von x die Gleichung besteht

$$\frac{R(x)}{(x - \varkappa)^m y} = D_x \left\{ \frac{R_1(x) y}{(x - \varkappa)^{m-1}} \right\} + \frac{A}{(x - \varkappa) y}. \tag{18}$$

Wird nämlich die Differentiation ausgeführt, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{R(x)}{(x - \varkappa)^m y} = \frac{R_1'(x) y + R_1(x) \frac{ax + b}{y}}{(x - \varkappa)^{m-1}} - \frac{(m-1) R_1(x) y}{(x - \varkappa)^m} + \frac{A}{(x - \varkappa) y}$$

und lautet nach Abschaffung der Nenner

$$(19)\quad \begin{cases} R(x) = [R_1'(x)(ax^2+2bx+c) + R_1(x)(ax+b)](x-\varkappa) \\ \quad - (m-1)R_1(x)(ax^2+2bx+c) + A(x-\varkappa)^{m-1}; \end{cases}$$

nach Ausführung aller rechts angezeigten Operationen heben sich dort die Glieder m-ten Grades auf; ist nämlich

$$R_1(x) = \alpha_0 x^{m-2} + \alpha_1 x^{m-3} + \cdots,$$

also

$$R_1'(x) = (m-2)\alpha_0 x^{m-3} + (m-3)\alpha_1 x^{m-4} + \cdots,$$

so ergibt sich im ersten der drei Theile auf der rechten Seite von (19) das Glied

$$(m-1)a\alpha_0 x^m,$$

im zweiten Theile das Glied

$$-(m-1)a\alpha_0 x^m$$

und beide heben sich auf. Es verbleiben sonach rechts und links ganze Functionen des $m-1$-ten Grades, und durch Vergleichung ihrer Coefficienten ergeben sich zur Berechnung der $m-1$ Coefficienten von $R_1(x)$ und des A die gerade nothwendigen m Gleichungen, die zu einer eindeutigen Bestimmung führen, weil sie bezüglich der zu berechnenden Grössen linear sind.

Sind $R_1(x)$ und A auf Grund von (19) ermittelt, so liefert die Integration von (18)

$$(20)\quad \int \frac{R(x)}{(x-\varkappa)^m y}\,dx = \frac{R_1(x)}{(x-\varkappa)^{m-1}}\,y + A\int \frac{dx}{(x-\varkappa)y};$$

dadurch erscheint thatsächlich das Integral (17) auf jenes (16) zurückgeführt.

Es erübrigt nun noch zu zeigen, dass sich das Integral (16) in das Grundintegral (12) umsetzen lässt.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir das Trinom

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c$$

nach Potenzen von $x-\varkappa$ und machen hierzu den Ansatz

$$ax^2 + 2bx + c = a'(x-\varkappa)^2 + 2b'(x-\varkappa) + c';$$

daraus ergibt sich durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten

$$\begin{aligned} a &= \quad a' \\ b &= -\varkappa a' + b' \\ c &= \quad \varkappa^2 a' - 2\varkappa b' + c', \end{aligned}$$

woraus weiter folgt

(21) $a' = a, \qquad b' = a\varkappa + b, \qquad c' = a\varkappa^2 + 2b\varkappa + c \lessgtr 0.$

Mit Benützung dieser Coefficienten und der Substitution

$$x - \varkappa = \frac{1}{t}, \quad \text{aus welcher} \quad dx = -\frac{dt}{t^2},$$

erhält man

$$(22) \quad \int \frac{dx}{(x-\varkappa)y} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a'}{t^2} + \frac{2b'}{t} + c'}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{c't^2 + 2b't + a'}},$$

und damit ist wirklich das Integral $\int \frac{dx}{(x-\varkappa)y}$ in ein Integral von der Grundform (12) umgewandelt.

239. Die noch zu lösende Aufgabe ist die *Entwicklung des Grundintegrals*

$$(12) \qquad \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}};$$

diese führt zu verschiedenen Functionen, je nach dem Vorzeichen von a.

Ist $a > 0$, so transformire man das Trinom zunächst in

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}\left[(ax + b)^2 + ac - b^2\right]$$

und setze

(23) $ax + b = z$, woraus $dx = \frac{dz}{a}$; ferner $ac - b^2 = \delta$;

es darf angenommen werden, dass $\delta \lessgtr 0$, weil für $\delta = 0$ die Irrationalität von Anfang an aufhörte zu bestehen.

Hiermit wird

$$(24) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \delta}};$$

wenn $\delta > 0$, besteht Realität für alle Werte von z, also auch für alle Werte von x; wenn aber $\delta < 0$, so hat das Integral nur so lange reelle Bedeutung, als $z^2 > |\delta|$, also $\frac{-b - \sqrt{\delta}}{a} < x < \frac{-b + \sqrt{\delta}}{a}$ ist.

Das vereinfachte Integral kann mittelst der Substitution

$$(25) \qquad \sqrt{z^2 + \delta} = t - z$$

gelöst werden*); quadrirt man diese Gleichung, so kommt man nach Aufhebung von z^2 zu

$$\delta = -2zt + t^2,$$

woraus

$$z = \frac{t^2 - \delta}{2t}$$

folgt; hiermit aber ergibt sich aus (25)

$$\sqrt{z^2 + \delta} = \frac{t^2 + \delta}{2t}$$

und durch Differentiation

$$dz = \frac{t^2 + \delta}{2t^2}\, dt.$$

Daraus und mit Berücksichtigung von (25) erhält man

$$(26)\quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \delta}} = \int \frac{dt}{t} = l.\, t + C = l. \left(z + \sqrt{z^2 + \delta}\right) + C,$$

daher ist

$$(27)\left\{\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\, l. \left(ax + b + \sqrt{a}\sqrt{ax^2 + 2bx + c}\right) + C \qquad (a > 0). \end{aligned}\right.$$

2) Wenn $a < 0$ ist, so gestalte man das Trinom wie folgt um:

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{-a}\left[b^2 - ac - (ax + b)^2\right];$$

mit den Substitutionen (23) ergibt sich hiermit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dz}{\sqrt{-\delta - z^2}};$$

Realität besteht nur, wenn $\delta < 0$ und dann nur solange, als $z^2 < -\delta$.

Das vereinfachte Integral ist jetzt unmittelbar auf eine Grundformel zurückführbar, indem

---

*) Mit Umgehung dieser Umformung kann auf das ursprüngliche Integral die Transformation

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = x\sqrt{a} + t$$

angewandt werden; sie führt zum Ziele, weil sowohl dx wie y sich rational in t ausdrücken.

$$(28)\quad \int \frac{dz}{\sqrt{-\delta - z^2}} = \int \frac{d\frac{z}{\sqrt{-\delta}}}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{\sqrt{-\delta}}\right)^2}} = \arcsin \frac{z}{\sqrt{-\delta}} + C$$

ist; durch Restitution der Variabeln x gelangt man zu dem Schlussresultate

$$(29)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-(ax+b)}{\sqrt{b^2 - ac}} + C \quad (a<0).$$

240. *Beispiele.* 1) Durch unmittelbare Anwendung der Formeln (27) und (29) ergeben sich die Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(2a+x)}} = l.(x + a + \sqrt{x(2a+x)}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(2a-x)}} = \arcsin \frac{x-a}{a} + C.$$

2) Die Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{(mx+n)dx}{y},$$

beziehungsweise seine Zurückführung auf das Grundintegral $\int \frac{dx}{y}$, hat nach dem ersten Satze in **238** zu erfolgen. Man erreicht die dort bewiesene Umformung des Differentials indessen leicht dadurch, dass man aus $mx + n$ den halben Differentialquotienten von y^2, d. i. $ax + b$, herstellt; es ist nämlich

$$mx + n = \frac{m}{a}(ax+b) + \frac{an - bm}{a},$$

folglich

$$\int \frac{(mx+n)dx}{y} = \frac{m}{a}\int \frac{(ax+b)dx}{y} + \frac{an-bm}{a}\int \frac{dx}{y},$$

also schliesslich

$$(30)\quad \int \frac{(mx+n)dx}{y} = \frac{m}{a} y + \frac{an-bm}{a}\int \frac{dx}{y}.$$

3) Um das Integral

$$\int y\, dx$$

zu entwickeln, bilde man es zuerst in $\int \frac{y^2 dx}{y}$ um und hat nun nach dem ersten Satze in **238** folgende Rechnung. Es ist

$$\frac{y^2}{y} = \frac{ax^2 + 2bx + c}{y} = D_x\{(Ax + B)y\} + \frac{C}{y}$$

nach Ausführung der Differentiation und Beseitigung der Brüche

$$ax^2 + 2bx + c = A(ax^2 + 2bx + c) + (Ax + B)(ax + b) + C;$$

die Vergleichung der Coefficienten gibt

$$\begin{aligned} a &= 2aA \\ 2b &= 3bA + aB \\ c &= cA + bB + C \end{aligned}$$

und daraus berechnet sich

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{b}{2a}, \qquad C = \frac{ac - b^2}{2a}.$$

Mithin ist

$$\int y\,dx = \frac{ax + b}{2a}\,y + \frac{ac - b^2}{2a}\int \frac{dx}{y}. \tag{31}$$

Ein anderes Verfahren geht darauf hinaus, das Integral $\int y\,dx$ auf ein Integral von der in 2) behandelten Form zurückzuführen; man findet nämlich durch partielle Integration

$$\int y\,dx = xy - \int \frac{x(ax + b)}{y}\,dx;$$

nun ist aber

$$x(ax + b) = ax^2 + bx = y^2 - (bx + c),$$

daher weiter

$$\int y\,dx = xy - \int y\,dx + \int \frac{(bx + c)dx}{y},$$

also

$$\int y\,dx = \frac{xy}{2} + \int \frac{(bx + c)dx}{y}.$$

4) Die in **238** zur Berechnung des Integrals

$$\int \frac{dx}{(x - \varkappa)y}$$

vorgeführte Methode, welche darin besteht, das Trinom $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ nach Potenzen von $x - \varkappa$ zu entwickeln und dann $x - \varkappa = \frac{1}{t}$ zu substituiren, kann auch dann angewandt werden, wenn $\varkappa$ eine Wurzel jenes Trinoms, also $c' = a\varkappa^2 + 2b\varkappa + c = 0$ ist; es ergibt sich dann

$$ax^2 + 2bx + c = a'(x-\varkappa)^2 + 2b'(x-\varkappa)$$

und

$$\int \frac{dx}{(x-\varkappa)y} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a'}{t^2} + \frac{2b'}{t}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2b't + a'}}$$
$$= -\frac{1}{b'}\sqrt{2b't + a'} + C;$$

schliesslich sind im Resultate noch a', b', t durch ihre Werte zu ersetzen.

Hiernach ergeben sich folgende Integralformeln:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)\sqrt{2(x+1)-(x+1)^2}}$$
$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2t-1}} = -\sqrt{2t-1} + C = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2 - 2(x+1)}}$$
$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t}} = \sqrt{1-2t} + C = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-d(1-x)}{(1-x)\sqrt{2(1-x)-(1-x)^2}}$$
$$= \int \frac{dt}{\sqrt{2t-1}} = \sqrt{2t-1} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 2(x-1)}}$$
$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t}} = -\sqrt{1+2t} + C = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

5) Zur Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

hat man, wenn $|\varepsilon| \lessgtr 1$, zufolge des zweiten Satzes in **238** den Ansatz

$$\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}} = D_x \frac{A\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x} + \frac{B}{(1+\varepsilon x)\sqrt{1-x^2}};$$

nach Ausführung der Differentiation und Entfernung der Nenner ergeben sich zur Bestimmung von A, B die Gleichungen

$$0 = B\varepsilon - A$$
$$1 = B \;- A\varepsilon,$$

woraus

$$A = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, \qquad B = \frac{1}{1-\varepsilon^2}.$$

Daher ist zunächst

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon x)} + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)\sqrt{1-x^2}}.$$

In dem noch übrigen Integrale setze man

$$1 - x^2 = \alpha(1+\varepsilon x)^2 + 2\beta(1+\varepsilon x) + \gamma;$$

daraus entspringen die Gleichungen

$$-1 = \varepsilon^2\alpha$$
$$0 = \alpha + \beta$$
$$1 = \alpha + 2\beta + \gamma$$

und diese ergeben

$$\alpha = -\frac{1}{\varepsilon^2}, \qquad \beta = \frac{1}{\varepsilon^2}, \qquad \gamma = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2},$$

so dass mit der Substitution $1 + \varepsilon x = \frac{1}{t}$

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(\varepsilon^2-1)t^2+2t-1}}$$

hervorgeht.

Mithin hat man

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon x)} - \frac{1}{1-\varepsilon^2}\int \frac{dt}{\sqrt{(\varepsilon^2-1)t^2+2t-1}}.$$

Der Wert des Grundintegrals hängt nun davon ab, ob ε^2 grösser oder kleiner als 1 ist. Nach den Formeln (27) und (29) ist schliesslich

für $\varepsilon^2 > 1$

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2-1}\left[\frac{-\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\, l.\, \frac{\varepsilon + x + \sqrt{(\varepsilon^2-1)(1-x^2)}}{1+\varepsilon x}\right] + C,$$

für $\varepsilon^2 < 1$
$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2 \sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x} - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arccos\frac{\varepsilon + x}{1+\varepsilon x}\right] + C.$$

In dem unerledigt gebliebenen Falle $\varepsilon^2 = 1$, wo also der unter dem Integralzeichen vor der Wurzel stehende Factor $(1 \pm x)$ auch unter der Wurzel erscheint, führt der folgende Ansatz zum Ziele: Es sind A, B so bestimmbar, dass
$$\frac{1}{(1+x)^2\sqrt{1-x^2}} = D_x \frac{A\sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2} + \frac{B}{(1+x)\sqrt{1-x^2}};$$
denn nach vollzogener Differentiation und Beseitigung der Nenner hat man
$$1 + x = (A+B)x^2 + (2B - A)x + B - 2A$$
und daraus folgen die Gleichungen
$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= 2B - A \\ 1 &= B - 2A, \end{aligned}$$
deren jede eine Folge der beiden andern ist; man berechnet daraus
$$A = -\frac{1}{3}, \qquad B = \frac{1}{3}$$
und hat nun mit Benützung der Formeln des vorigen Beispiels
$$\int \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3(1+x)^2}$$
$$+ \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2+x}{3(1+x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Auf demselben Wege findet man
$$\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-x}{3(1-x)}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

241. Eine weitere Form von Integralen irrationaler Functionen ist

(32)
$$\int f(x, y, z)\,dx,$$

wo f eine rationale Function der Argumente x, y, z anzeigt und

(33)
$$y^2 = ax + b \qquad z^2 = a'x + b' \qquad \left(\frac{a}{a'} \lessgtr \frac{b}{b'}\right)$$

ist.

Man führt an Stelle von x eine der Grössen y, z als Integrationsvariable ein; wird y hiefür gewählt, so ist

$$x = \frac{y^2 - b}{a}, \qquad dx = \frac{2y\,dy}{a}, \qquad z^2 = \frac{a'}{a}y^2 + \frac{ab' - a'b}{a}$$

und

$$\int f(x, y, z)\,dx = \frac{2}{a}\int f\left(\frac{y^2 - b}{a},\ y,\ \sqrt{\frac{a'}{a}y^2 + \frac{ab' - a'b}{a}}\right) y\,dy.$$

Hiermit erscheint das Integral auf den in **237** und den folgenden Artikeln erledigten Fall zurückgeführt, da es sich jetzt um eine quadratische Irrationalität, bezogen auf eine ganze Function zweiten Grades, handelt.

Beispiel. Das Integral

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\,\frac{dx}{x}$$

kann ohne Einführung einer neuen Variabeln, nämlich durch die Umgestaltung

$$\int \frac{(1 - x)\,dx}{x\sqrt{x(1 - x)}}$$

auf die früher behandelte Form gebracht werden; die weitere Berechnung hätte nach den Formeln **238**, (22) und **240**, 1) zu geschehen.

Wendet man hingegen die Substitution

$$1 - x = y^2$$

an, so wird

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\,\frac{dx}{x} = 2\int \frac{y^2\,dy}{(y^2 - 1)\sqrt{1 - y^2}}$$
$$= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} + 2\int \frac{dy}{(y^2 - 1)\sqrt{1 - y^2}};$$

das erste Integral rechts führt zu der Function $\arcsin y$, das zweite zerfällt durch Zerlegung der gebrochenen Function $\frac{1}{y^2 - 1}$ in Partialbrüche in zwei Integrale, deren Werte aus **240**, 4) entnommen werden können; es ist nämlich

$$2\int \frac{dy}{(y^2 - 1)\sqrt{1 - y^2}} = \int \frac{dy}{(y - 1)\sqrt{1 - y^2}} - \int \frac{dy}{(y + 1)\sqrt{1 - y^2}}$$
$$= -\sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}} + \sqrt{\frac{1 - y}{1 + y}} = -\frac{2y}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Demnach ist schliesslich

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{x} = 2\arcsin\sqrt{1-x} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C.$$

242. Eine häufig vorkommende Gattung von Integralen bilden die *Integrale der binomischen Differentialausdrücke.* Man versteht hierunter Integrale von der typischen Form

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx, \tag{34}$$

worin m, n, p rationale Zahlen bedeuten.

Einen neuen Fall bietet dies nur dann dar, wenn p *keine* ganze Zahl ist. Denn wären neben p auch m, n ganze Zahlen, so hätte man es mit einer rationalen Function zu thun, und wären m, n gebrochene Zahlen, so würde es sich um die in 235 behandelte monomische Irrationalität handeln.

Dagegen können m, n als ganze Zahlen vorausgesetzt werden. Wären sie es nicht, wären es vielmehr Brüche mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner q, so dass

$$m = \frac{m'}{q}, \qquad n = \frac{n'}{q},$$

so führte die Substitution

$$x = t^q$$

das Differential $x^m(ax^n + b)^p dx$ über in

$$qt^{m'+q-1}(at^{n'} + b)^p dt$$

und dies ist wieder ein binomisches Differential, in welchem die Exponenten $m' + q - 1$, n' ganze Zahlen sind.

Wir setzen daher im Folgenden m, n als ganze Zahlen, p dagegen als einen Bruch

$$p = \frac{p'}{r}$$

voraus.

Es gibt zwei Fälle, in welchen das binomische Differential sich in ein rationales Differential umwandeln und daher mittels der elementaren Functionen in endlicher Form integriren lässt.

Setzt man nämlich $x^n = y$, so wird

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx = \frac{1}{n}\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(ay + b)^p dy$$

und ist

(A) $\frac{m+1}{n}$ *eine ganze Zahl,*

so bezieht sich die Irrationalität einzig und allein auf das lineare Binom $ay + b$ und kann nach **235**, 2) beseitigt werden durch die Substitution

$$ay + b = t^r,$$

d. h. das ursprüngliche Integral wird durch die Substitution

(a) $$ax^n + b = t^r$$

auf das Integral einer rationalen Function gebracht.

Es ergibt sich ferner durch blosse Umformung

$$\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(ay+b)^p dy = \int y^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{ay+b}{y}\right)^p dy,$$

und ist

(B) $\frac{m+1}{n} + p$ *eine ganze Zahl,*

so bezieht sich in dem letzten Integrale die Irrationalität nur mehr auf die linear gebrochene Function $\frac{ay+b}{y}$ und kann nach **235**, 3) entfernt werden durch die Substitution

$$\frac{ay+b}{y} = t^r,$$

d. h. das ursprüngliche Integral wird durch die Substitution

(b) $$a + bx^{-n} = t^r$$

in das Integral einer rationalen Function verwandelt.

Bemerkenswert ist, dass die Integrabilitätsbedingung (A) von dem gebrochenen Exponenten p nicht abhängt.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

erfüllt die Bedingung (A), weil $\frac{3+1}{2}$ eine ganze Zahl ist. Man setze daher

$$1 + x^2 = t^2,$$

findet daraus

$$x^2 = t^2 - 1, \quad x\,dx = t\,dt, \quad x^3 dx = t(t^2-1)\,dt$$

und

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int (t^2 - 1)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2} + C.$$

2) In dem Integrale

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^8}}$$

ist die Bedingung (A) nicht, wohl aber die Bedingung (B) erfüllt, weil $\frac{3+1}{8} - \frac{1}{2} = 0$ als ganze Zahl aufzufassen ist. Man forme daher das Integral zuerst in

$$\int \frac{x^3 dx}{x^4 \sqrt{x^{-8}+1}} = \int \frac{x^{-1} dx}{\sqrt{x^{-8}+1}}$$

um und setze dann

$$x^{-8} + 1 = t^2;$$

daraus folgt

$$x^{-8} = t^2 - 1, \qquad -4x^{-9} dx = t\,dt, \qquad x^{-1} dx = -\frac{t\,dt}{4(t^2-1)};$$

somit ist

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^8}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{8}\, l. \frac{t+1}{t-1} + C = \frac{1}{4}\, l. (x^4 + \sqrt{1+x^8}) + C.$$

Man bemerke übrigens, dass das vorgelegte Integral auch durch die Substitution $x^4 = z$ auf die Formel **239**, (26) hätte zurückgeführt werden können.

243. Wenn einer der Exponenten m, p oder beide Zahlen von einigermaassen grossem Betrage sind, so empfiehlt sich die Reduction des Integrals (34) auf Integrale derselben Form aber dem Betrage nach kleineren Exponenten m, p. Diesen Vorgang wird man im Allgemeinen auch dann befolgen, wenn eine der Integrabilitätsbedingungen (A), (B) erfüllt ist, weil die unmittelbare Herstellung der rationalen Form auf beschwerliche Rechnungen führen würde. Die *Reductionsformeln,* welche allen Bedürfnissen genügen, sind nachstehend abgeleitet.

1) Durch partielle Integration mit der Zerlegung

$$u = (ax^n + b)^p, \quad dv = x^m dx$$

ergibt sich

$$\text{(I)} \qquad \int x^m (ax^n + b)^p\, dx$$

$$= \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+1} - \frac{npa}{m+1}\int x^{m+n}(ax^n+b)^{p-1} dx \quad (m+1 \gtrless 0).$$

Kehrt man die Formel um und erhöht gleichzeitig p um 1, vermindert m um n, so kommt

$$\text{(II)}\qquad \int x^m(ax^n+b)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{n(p+1)a}$$
$$-\frac{m-n+1}{n(p+1)a}\int x^{m-n}(ax^n+b)^{p+1}dx \qquad (p+1 \gtrless 0).$$

2) Wird unter dem Integrale auf der rechten Seite von (I) $x^{m+n} = \frac{1}{a}x^m(ax^n+b) - \frac{b}{a}x^m$ gesetzt, so zerfällt dieses Integral in die Differenz zweier, deren eines mit dem linksseitigen übereinstimmt, und durch entsprechende Zusammenziehung erhält man

$$\text{(III)}\qquad \int x^m(ax^n+b)^p dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+np+1}$$
$$+\frac{npb}{m+np+1}\int x^m(ax^n+b)^{p-1}dx \qquad (m+np+1 \gtrless 0).$$

Die Umkehrung dieser Formel bei gleichzeitiger Erhöhung von p um 1 liefert

$$\text{(IV)}\qquad \int x^m(ax^n+b)^p dx = -\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1}}{n(p+1)b}$$
$$+\frac{m+n(p+1)+1}{n(p+1)b}\int x^m(ax^n+b)^{p+1}dx \qquad (p+1 \gtrless 0).$$

3) Zerlegt man in dem Integrale auf der rechten Seite von (II) $(ax^n+b)^{p+1}$ in die Factoren $(ax^n+b)^p(ax^n+b)$, so löst sich dieses Integral in die Summe zweier auf, wovon eines mit dem linksseitigen übereinstimmt; durch Zusammenziehung dieser Glieder ergibt sich

$$\text{(V)}\qquad \int x^m(ax^n+b)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{(m+np+1)a}$$
$$-\frac{(m-n+1)b}{(m+np+1)a}\int x^{m-n}(ax^n+b)^p dx \qquad (m+np+1 \gtrless 0).$$

Aus der Umkehrung dieser Formel bei gleichzeitiger Erhöhung vom m um n resultirt schliesslich

$$\text{(VI)}\qquad \int x^m(ax^n+b)^p dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1}}{(m+1)b}$$
$$-\frac{(m+n+np+1)a}{(m+1)b}\int x^{m+n}(ax^n+b)^p dx \qquad (m+1 \gtrless 0).$$

Die Formeln (I), (II) ändern m und p gleichzeitig, (III), (IV) ändern nur p, (V), (VI) nur m; die Änderung von m beträgt jedesmal $\pm n$, die von p jedesmal ± 1.

In allen Fällen, wo die Formeln unwirksam werden, ist eine der Integrabilitätsbedingungen erfüllt und kann das Integral auf das einer rationalen Function zurückgeführt werden. So ist beispielsweise bei (III) und (V), wenn $m + np + 1 = 0$, $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze Zahl (0) und daher die Bedingung (B) erfüllt.

244. *Beispiele.* 1) Auf das Integral

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wird jene Formel anzuwenden sein, welche den Exponenten $p = -\frac{3}{2}$ erhöht, jenen $m = 0$ aber ungeändert lässt, also die Formel (IV); da $n(p+1) \cdot b = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} + 1\right) \cdot 1 = -1$ und $m + n(p+1) + 1 = 0 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} + 1\right) + 1 = 0$ ist, so hat man ohne weitere Integration

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

2) Das Integral

$$u_{2\mu} = \int \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung (B). Um es zu reduciren, wird man unter den Formeln diejenige aufsuchen, welche $m = 2\mu$ herabmindert und $p = -\frac{1}{2}$ ungeändert lässt; es ist die Formel (V), und ihre wiederholte Anwendung gibt nach und nach

$$u_{2\mu} = -\frac{x^{2\mu-1}\sqrt{1-x^2}}{2\mu} + \frac{2\mu-1}{2\mu} u_{2\mu-2}$$

$$u_{2\mu-2} = -\frac{x^{2\mu-3}\sqrt{1-x^2}}{2\mu-2} + \frac{2\mu-3}{2\mu-2} u_{2\mu-4}$$

. . . .

$$u_2 = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} u_0;$$

multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$1, \quad \frac{2\mu-1}{2\mu}, \quad \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)}{2\mu(2\mu-2)}, \ldots \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3}{2\mu(2\mu-2)\cdots 4}$$

und bildet die Summe, so kommt man mit Rücksicht darauf, dass $u_0 = \arcsin x$ ist, zu der Schlussformel

$$(35)\left\{\begin{aligned} &\int \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu}\Big[x^{2\mu-1} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2}x^{2\mu-3} \\ &+ \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)}{(2\mu-2)(2\mu-4)}x^{2\mu-5} + \cdots + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3}{(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots 2}x\Big] \\ &+ \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 1}{2\mu(2\mu-2)\cdots 2}\arcsin x + C. \end{aligned}\right.$$

Durch den gleichen Vorgang ergibt sich die Formel

$$(36)\left\{\begin{aligned} &\int \frac{x^{2\mu+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu+1}\Big[x^{2\mu} + \frac{2\mu}{2\mu-1}x^{2\mu-2} \\ &+ \frac{2\mu(2\mu-2)}{(2\mu-1)(2\mu-3)}x^{2\mu-4} + \cdots + \frac{2\mu(2\mu-2)\cdots 4}{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3}x^2 \\ &+ \frac{2\mu(2\mu-2)\cdots 2}{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 1}\Big] + C. \end{aligned}\right.$$

Bemerkenswert ist, dass im ersten Falle die Integration zu einer transcendenten, im zweiten zu einer algebraischen Function führt.

3) Das Integral

$$v_{2\mu} = \int \frac{dx}{x^{2\mu}\sqrt{1-x^2}}$$

wird durch Erhöhung des Exponenten $m = -2\mu$ bei ungeändertem $p = -\frac{1}{2}$, also mittels der Formel (VI) zu reduciren sein; wiederholte Anwendung derselben gibt

$$v_{2\mu} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2\mu-1)x^{2\mu-1}} + \frac{2\mu-2}{2\mu-1}v_{2\mu-2}$$

$$v_{2\mu-2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2\mu-3)x^{2\mu-3}} + \frac{2\mu-4}{2\mu-3}v_{2\mu-4}$$

. . . .

$$v_2 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$1, \quad \frac{2\mu-2}{2\mu-1}, \ldots \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots 2}{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3},$$

so gibt darauffolgende Addition

$$(37)\begin{cases} \int \frac{dx}{x^{2\mu}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu-1}\left[\frac{1}{x^{2\mu-1}} + \frac{2\mu-2}{2\mu-3}\frac{1}{x^{2\mu-3}}\right. \\ \left. + \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)}{(2\mu-3)(2\mu-5)}\frac{1}{x^{2\mu-5}} + \cdots + \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots 2}{(2\mu-3)(2\mu-5)\cdots 1}\frac{1}{x}\right] + C. \end{cases}$$

Auf dieselbe Art ist das Integral $\int \frac{dx}{x^{2\mu+1}\sqrt{1-x^2}}$ zu behandeln; das End-Integral, zu welchem man gelangt, ist (238, 239)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = l.\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x};$$

die endgiltige Formel lautet

$$(38)\begin{cases} \int \frac{dx}{x^{2\mu+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu}\left[\frac{1}{x^{2\mu}} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2}\frac{1}{x^{2\mu-2}}\right. \\ \left. + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)}{(2\mu-2)(2\mu-4)}\frac{1}{x^{2\mu-4}} + \cdots + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3}{(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots 2}\frac{1}{x^2}\right] \\ + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 1}{2\mu(2\mu-2)\cdots 2}\, l.\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \end{cases}$$

§ 3. Integration transcendenter Functionen.

245. Es gibt nur eine sehr beschränkte Anzahl von Formen transcendenter Differentiale, bei welchen die Integration mit Hilfe der elementaren Functionen in geschlossener Darstellung möglich ist. Wo diese Möglichkeit aufhört, gelingt es mitunter, die Integration bis zu gewissen Grundintegralen zu führen, welche dann als neue transcendente Functionen höherer Ordnung zu den elementaren Transcendenten hinzutreten.

Bei der Mannigfaltigkeit der Combinationen, in welchen diese letzteren untereinander und mit algebraischen Functionen sich verbinden können, lassen sich allgemeine Methoden für die Behandlung solcher Integrale nicht angeben; der einzuschlagende Vorgang hängt von der besonderen Gestalt des zu integrirenden Differentials ab.

Lässt dieses durch Transformation der Variabeln sich in ein algebraisches Differential verwandeln, so ist die Aufgabe auf eine bereits behandelte zurückgeführt. Nicht immer ist es jedoch vortheilhaft, die Integration an diesem algebraischen Differential zu vollziehen, um dann wieder zu der ursprünglichen Variabeln zurückzukehren; die Umwandlung erfüllt mitunter nur den Zweck, um über die Möglichkeit einer elementaren Integration entscheiden zu können.

Es gibt einen allgemeinen Fall, wo ein Integral mit transcendentem Differential sich durch partielle Integration auf ein solches mit algebraischem Differential reduciren lässt. *Ist nämlich $\varphi(x)$ eine algebraische Function, deren Integral $\Phi(x)$ auch algebraisch ist, und $\psi(x)$ eine transcendente Function, deren Differential algebraisch ist,* so gibt

$$\int \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

bei partieller Integration mit der Zerlegung

$$u = \psi(x), \quad dv = \varphi(x)dx$$

$$\int \varphi(x)\psi(x)dx = \Phi(x)\psi(x) - \int \Phi(x)\psi'(x)dx, \tag{1}$$

und ist somit das linksstehende Integral mit transcendentem Differential auf das rechtsstehende, welches auf eine algebraische Function sich bezieht, zurückgeführt.

Der besprochene Fall tritt beispielsweise ein, wenn $\varphi(x)$ eine rationale ganze Function und

$$\psi(x) = l.\varpi(x), \qquad \arcsin \varpi(x), \qquad \operatorname{arctg} \varpi(x),$$

wobei $\varpi(x)$ eine algebraische Function ist; denn dann ist sowohl $\Phi(x)$ wie auch

$$\psi'(x) = \frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}, \qquad \frac{\varpi'(x)}{\sqrt{1-\varpi(x)^2}}, \qquad \frac{\varpi'(\varpi)}{1+\varpi(x)^2}$$

eine algebraische Function.

Beispiele. 1) Es ist

$$\int x^n\, l.(x+\sqrt{1+x^2})dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\, l.(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

das rechtsstehende Integral bezieht sich auf ein binomisches Differential, das bei ganzzahligem n immer integrabel ist.

2) Zu einem analogen Resultate führt

$$\int x^n \arcsin x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin x - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

insbesondere ist (**222**, 2))

$$\int x\arcsin x\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2-1}{4}\arcsin x + C.$$

3) Durch die Formel

$$\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{1+x^2}$$

ist das linksstehende Integral bei rationalem n auf das einer algebraischen stets integrirbaren Function, bei ganzem positiven n insbesondere auf die Form **238**, 3) zurückgeführt.

246. Über die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien die nämlichen Voraussetzungen gemacht wie vorhin; auf das Integral

$$\int\varphi(x)\psi(x)^n dx \qquad (n>0)$$

die partielle Integration mit der Zerlegung $u=\psi(x)^n$, $dv=\varphi(x)dx$ angewendet erhält man

$$(2)\quad \int\varphi(x)\psi(x)^n dx = \Phi(x)\psi(x)^n - n\int\Phi(x)\psi'(x)\psi(x)^{n-1}dx;$$

auf das neue Integral kann dasselbe Verfahren aber nur dann angewendet werden, wenn auch die algebraische Function $\Phi(x)\psi'(x)$ ein algebraisches Integral gibt.

Bei dem Integrale

$$\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)^n}dx \qquad (n>0)$$

hätte man, um eine Reduction zu erzielen, die partielle Integration mit der Zerlegung $u=\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}$, $dv=\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)^n}$ auszuführen; dies gibt

$$(3)\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)^n}dx = -\frac{\varphi(x)}{(n-1)\psi'(x)\psi(x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int D_x\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}\frac{dx}{\psi(x)^{n-1}};$$

eine weitere Herabminderung des Exponenten der transcen-

denten Function kann nach demselben Verfahren, mit Hilfe der Zerlegung $u = \frac{D_x \frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}}{\psi'(x)}$, $dv = \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)^{n-1}}$, erfolgen.

Beispiele. 1) Der durch die Formel (2) ausgedrückte Vorgang lässt sich auf das Integral $\int x^m (l.\,x)^n dx$ anwenden; es ist nämlich

$$\int x^m (l.\,x)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(l.\,x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (l.\,x)^{n-1} dx$$
$$(m \lesseqgtr -1)$$

und die Formel bei $n > 0$ eine wirkliche Reductionsformel.

Ebenso ergibt sich für

$$\int \arcsin^n x\, dx = x \arcsin^n x - n\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{n-1} x\, dx,$$

wenn man auf das rechtsstehende Integral denselben Vorgang nochmals anwendet, wodurch

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{n-1} x\, dx$$
$$= -\sqrt{1-x^2} \arcsin^{n-1} x + (n-1)\int \arcsin^{n-2} x\, dx$$

erhalten wird, die Reductionsformel

$$\int \arcsin^n x\, dx$$
$$= x \arcsin^n x + n\sqrt{1-x^2} \arcsin^{n-1} x - n(n-1)\int \arcsin^{n-2} x\, dx.$$

2) Auf Grund der Formel (3) ist

$$\int \frac{x^m dx}{(l.\,x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(l.\,x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{(l.\,x)^{n-1}} \quad (m \lesseqgtr -1),$$

und diese Formel führt nach wiederholter Anwendung schliesslich auf das Integral

$$\int \frac{x^m dx}{l.\,x},$$

das durch die Substitution $x^{m+1} = z$ auf das Integral

$$(4) \qquad \int \frac{dz}{l.\,z}$$

zurückgeführt wird, eine neue Transcendente, welche als *Integrallogarithmus* bezeichnet wird.

Für $m = -1$ und $n > 1$ hat man unmittelbar

$$\int \frac{dx}{x(l.x)^n} = \int (l.x)^{-n} d\,l.x = -\frac{(l.x)^{-n+1}}{n-1} + C$$

und für $m = -1$ und $n = 1$

$$\int \frac{dx}{x\,l.x} = \int \frac{d\,l.x}{l.x} = l.l.x + C.$$

Ebenso ergibt sich durch zweimalige Anwendung der Formel (3) die Reductionsformel

$$\int \frac{dx}{\arcsin^n x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-1)\arcsin^{n-1} x} + \frac{x}{(n-1)(n-2)\arcsin^{n-2} x}$$
$$-\frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{dx}{\arcsin^{n-2} x},$$

durch deren wiederholten Gebrauch man, weil sie nur bis $n = 3$ zulässig ist, schliesslich zu einem der Integrale

$$\int \frac{dx}{\arcsin x}, \quad \int \frac{dx}{\arcsin^2 x}$$

gelangt; das erste verwandelt sich durch die Substitution $\arcsin x = z$ in

$$\int \frac{\cos z\,dz}{z}, \tag{5}$$

das zweite gibt nach einmaliger Anwendung der Formel (3)

$$\int \frac{dx}{\arcsin^2 x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\arcsin x}$$

und das noch erübrigende Integral geht nach derselben Substitution über in

$$\int \frac{\sin z\,dz}{z}. \tag{6}$$

Die Integrale (5) und (6) stellen neue transcendente Functionen dar, die als *Integralcosinus*, beziehungsweise *Integralsinus* bezeichnet werden.

247. Ist f das Zeichen für eine algebraische Function des nachfolgenden Argumentes, so wird das Integral

$$\int f(e^{\varkappa x})\,dx$$

durch die Substitution $e^{\varkappa x} = t$, aus welcher $dx = \frac{dt}{\varkappa t}$ entspringt, in das Integral einer algebraischen Function umgewandelt, es ist nämlich

$$(7) \qquad \int f(e^{\varkappa x})\,dx = \frac{1}{\varkappa}\int f(t)\frac{dt}{t}\cdot$$

Das vorgelegte Integral lässt sich also in endlicher Form darstellen, wenn f eine rationale Function bedeutet.

Beispiele. 1) Man hat für $a > 0$

$$\int\frac{a^x\,dx}{ma^x + n} = \frac{1}{l.a}\int\frac{dt}{mt+n} = \frac{l.(mt+n)}{m\,l.a} + C = \frac{l.(ma^x+n)}{m\,l.a} + C.$$

2) Unter derselben Voraussetzung ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ma^x+n}} = \frac{1}{l.a}\int\frac{dt}{t\sqrt{mt+n}} = \frac{2}{l.a}\int\frac{dz}{z^2-n},$$

wenn $mt + n = z^2$ gesetzt wird; daher hat man schliesslich

für $n > 0$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ma^x+n}} = \frac{1}{l.a}\,l.\frac{z+\sqrt{n}}{z-\sqrt{n}} + C = \frac{1}{l.a}\,l.\frac{\sqrt{ma^x+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{ma^x+n}-\sqrt{n}},$$

für $n < 0$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ma^x+n}} = \frac{2}{l.a\sqrt{-n}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{-n}} + C$$

$$= \frac{2}{l.a\sqrt{-n}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ma^x+n}{-n}} + C.$$

248. Das Integral

$$\int f(x)e^{\varkappa x}\,dx,$$

in welchem $f(x)$ eine rationale Function bedeutet, zerfällt im Allgemeinen in zwei Bestandtheile, nämlich

$$\int G(x)e^{\varkappa x}dx, \qquad \int\frac{F(x)}{\varphi(x)}e^{\varkappa x}dx,$$

wobei $G(x)$ die in $f(x)$ enthaltene ganze Function und $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ den nach Ausscheidung derselben verbleibenden irreductibeln echten Bruch darstellt.

Was den ersten Theil betrifft, so kann derselbe durch partielle Integration schliesslich auf das Grundintegral

$$\int e^{\varkappa x}\,dx = \frac{1}{\varkappa}\,e^{\varkappa x}$$

zurückgeführt werden; ist $G(x)$ vom n-ten Grade, so hat man nach und nach

$$\int G(x)\,e^{\varkappa x}dx = \frac{1}{\varkappa}\,G(x)\,e^{\varkappa x} - \frac{1}{\varkappa}\int G'(x)\,e^{\varkappa x}dx$$

$$\int G'(x)\,e^{\varkappa x}dx = \frac{1}{\varkappa}\,G'(x)e^{\varkappa x} - \frac{1}{\varkappa}\int G''(x)e^{\varkappa x}dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int G^{(n-1)}(x)e^{\varkappa x}dx = \frac{1}{\varkappa}\,G^{(n-1)}e^{\varkappa x} - \frac{1}{\varkappa}\int G^{(n)}(x)e^{\varkappa x}dx;$$

daraus ergibt sich durch Elimination der Zwischenintegrale und mit Rücksicht darauf, dass $G^{(n)}(x)$ eine Constante vorstellt,

$$(8)\begin{cases} \int G(x)e^{\varkappa x}dx \\ = \frac{e^{\varkappa x}}{\varkappa}\left[G(x) - \frac{G'(x)}{\varkappa} + \frac{G''(x)}{\varkappa^2} - \cdots + (-1)^n\frac{G^{(n)}(x)}{\varkappa^n}\right] + C. \end{cases}$$

Bezüglich des zweiten Theiles sei folgendes bemerkt. Eine einfache reelle Wurzel a von $\varphi(x)$ liefert einen Partialbruch $\frac{A}{x-a}$ und zu dem Integrale den Bestandtheil

$$A\int\frac{dx}{x-a}\,e^{\varkappa x};$$

setzt man hierin $x - a = \frac{l.\,z}{\varkappa}$, so geht dies über in

$$A\,e^{a\varkappa}\int\frac{dz}{l.\,z},$$

also in den Integrallogarithmus. — Eine m-fache reelle Wurzel a des Nenners $\varphi(x)$ führt einen Partialbruch $\frac{P(x)}{(x-a)^m}$ herbei, dessen Zähler eine ganze Function $(m-1)$-ten Grades ist, und daraus entsteht für das Integral der Bestandtheil

$$\int\frac{P(x)}{(x-a)^m}\,e^{\varkappa x}\,dx;$$

es lässt sich aber eine ganze Function $P_1(x)$ $\overline{m-2}$-ten Grades und eine Constante A derart bestimmen, dass

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m}\,e^{\varkappa x} = D_x\left\{\frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}}\,e^{\varkappa x}\right\} + \frac{A}{x-a}\,e^{\varkappa x}$$

wird; denn nach Ausführung der Differentiation und Beseitigung der Nenner heisst die Gleichung

$$(9)\quad \begin{cases} P(x) = \{P_1'(x) + \varkappa P_1(x)\}(x-a) - (m-1)P_1(x) \\ \qquad + A(x-a)^{m-1} \end{cases}$$

und gibt durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten die gerade nothwendigen m Gleichungen zur Ermittlung der $m-1$ Coefficienten in $P_1(x)$ und von A. Auf Grund jener Zerlegung aber ist

$$(10)\quad \int \frac{P(x)}{(x-a)^m} e^{\varkappa x} dx = \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}} e^{\varkappa x} + A\int \frac{dx}{x-a} e^{\varkappa x}$$

und das rechts verbleibende Integral führt wieder auf den Integrallogarithmus.

Beispiel. Für das Integral

$$\int \frac{x^2+1}{x^4} e^x dx$$

hat man die Zerlegung

$$\frac{x^2+1}{x^4} e^x = D_x \left\{\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3} e^x\right\} + \frac{D}{x} e^x$$

und zur Bestimmung der Coefficienten die Gleichung

$$x^2+1 = (2Ax+B+Ax^2+Bx+C)x \\ -3(Ax^2+Bx+C)+Dx^3;$$

daraus ergibt sich durch Vergleichung beider Seiten

$$A = -\frac{7}{6}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = -\frac{1}{3}, \quad D = \frac{7}{6};$$

hiernach ist

$$\int \frac{x^2+1}{x^4} e^x dx = -\frac{7x^2+x+2}{6x^3} e^x + \frac{7}{6}\int \frac{e^x}{x} dx.$$

249. Das Integral

$$\int f(l.x)dx,$$

in welchem f das Zeichen für eine rationale Function sein soll, geht durch die Substitution $l.x = t$ in das Integral des vorigen Artikels über, indem

$$(11)\quad \int f(l.x)dx = \int f(t)e^t dt$$

wird.

6*

Das Integral

$$\int f(x)\, l.x\, dx$$

zerfällt, ähnlich wie es dort geschah, in die beiden Integrale

$$\int G(x)\, l.x\, dx, \qquad \int \frac{F(x)}{\varphi(x)}\, l.x\, dx,$$

deren erstes durch das in **245** besprochene Verfahren der partiellen Integration sogleich auf ein algebraisches sich zurückführen lässt, indem

$$\int G(x)\, l.x\, dx = G_1(x)\, l.x - \int \frac{G_1(x)}{x}\, dx; \tag{12}$$

dabei bedeutet $G_1(x)$ das Integral von $G(x)$. — In dem zweiten Theile ergibt eine einfache reelle Wurzel a von $\varphi(x)$ den Bestandtheil

$$A \int \frac{l.x}{x-a}\, dx;$$

durch die Substitution $x - a = az$ verwandelt sich dies in

$$A \int \frac{l.a(1+z)}{z}\, dz = A\left\{l.a\, l.z + \int \frac{l.(1+z)}{z}\, dz\right\}$$

und das verbleibende Integral ist nicht durch elementare Functionen darstellbar. Eine mehrfache reelle Wurzel a gibt Bestandtheile von der Gestalt

$$A \int \frac{l.x}{(x-a)^m}\, dx,$$

die sich durch das Verfahren von **245** auf algebraische Integrale zurückführen lassen, indem für $m > 1$

$$\int \frac{l.x}{(x-a)^m}\, dx = -\frac{l.x}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{dx}{x(x-a)^{m-1}}. \tag{13}$$

Beispiele. 1) Auf Grund von (12) ist

$$\int (ax^2 + 2bx + c)\, l.x\, dx$$
$$= \left(\frac{ax^3}{3} + bx^2 + cx\right) l.x - \left(\frac{ax^3}{9} + \frac{bx^2}{2} + cx + C\right).$$

2) Mit Benützung von (13) erhält man

$$\int \frac{x^2+1}{x^4}\, l.x\, dx$$
$$= \int \frac{l.x}{x^2}\, dx + \int \frac{l.x}{x^4}\, dx = -\frac{9x^2+1}{9x^3} - \frac{3x^2+1}{3x^3}\, l.x + C.$$

250. Das Integral einer rationalen Function von

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg} x, \ldots$$

lässt sich immer auf das Integral einer rationalen algebraischen Function zurückführen; die dazu dienliche Substitution richtet sich nach den unter dem Integralzeichen auftretenden trigonometrischen Functionen und nach der Art ihres Vorkommens. Einige Fälle dieser Art sind im Nachstehenden dargestellt.

a) Eine immer zum Ziele führende Substitution ist

$$(14) \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t;$$

denn daraus folgt

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

so dass alle Bestandtheile rational in t ausgedrückt sind. Hiernach ist also

$$(14) \quad \int f(\sin x,\ \cos x, \ldots)\, dx = 2\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \cdots\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

und wenn f die Charakteristik für eine rationale Function ist, so bezieht sich die rechts vorgeschriebene Integration auf ein rationales algebraisches Differential.

Beispiele. 1) Es ist

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dt}{t} = l.\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C;$$

$$\int\frac{dx}{\cos x} = -\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -l.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$$

$$= l.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C;$$

$$\int\frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin\theta\cos x + \cos\theta\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d(x+\theta)}{\sin(x+\theta)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,l.\operatorname{tg}\frac{x+\theta}{2} + C,$$

wenn θ aus den Gleichungen

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$$

bestimmt wird.

2) Es ist

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} = 2\int \frac{dt}{a(1-t^2)+2bt+c(1+t^2)}$$
$$= 2\int \frac{dt}{(c-a)t^2+2bt+(c+a)}$$

und die weitere Entwicklung hängt von a, b, c ab (**227**, 1) oder **230**, (14)).

b) Hat das Integral, unter f immer eine rationale Function verstanden, eine der Formen

$$\int f(\sin^2 x,\ \cos x)\sin x\,dx, \qquad \int f(\sin x,\ \cos^2 x)\cos x\,dx,$$

so ist es einfacher, im ersten Falle $\cos x = t$, im zweiten Falle $\sin x = u$ zu setzen, indem dann

$$(15)\qquad \int f(\sin^2 x,\ \cos x)\sin x\,dx = -\int f(1-t^2,\ t)\,dt$$

$$(16)\qquad \int f(\sin x,\ \cos^2 x)\cos x\,dx = \int f(u,\ 1-u^2)\,du$$

wird.

Beispiel. 3) So ist

$$\int \frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = -\int \frac{dt}{at^2+b(1-t^2)} = -\frac{1}{b}\int \frac{dt}{1+\frac{a-b}{b}t^2},$$

also für $\frac{a-b}{b} > 0$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = -\frac{1}{\sqrt{(a-b)b}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{b}}\cos x\right) + C,$$

dagegen für $\frac{a-b}{b} < 0$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{(b-a)b}}\, l.\frac{1-\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x}{1+\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x} + C.$$

c) Bei einem Integrale von der Form

$$\int f(\operatorname{tg} x)\,dx$$

ist es am einfachsten, $\operatorname{tg} x = t$ zu setzen, indem dann

$$\int f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int f(t)\,\frac{dt}{1+t^2} \tag{17}$$

wird.

Beispiel. 4) In dem besonderen Falle $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x}$ führt diese Substitution auf das algebraische Integral

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)(a+bt)};$$

die Zerlegung der gebrochenen Function liefert

$$\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)} = \frac{a-bt}{(a^2+b^2)(1+t^2)} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)(a+bt)},$$

woraus sich

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)(a+bt)} = \frac{b}{a^2+b^2}\, l.(a+bt) - \frac{b}{2(a^2+b^2)}\, l.(1+t^2)$$
$$+ \frac{a}{a^2+b^2} \operatorname{arctg} t$$

und schliesslich

$$\int \frac{dx}{a+b \operatorname{tg} x} = \frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}\, l.(a \cos x + b \sin x) + C$$

ergibt.

Das vorliegende Integral lässt sich indessen auch mit Umgehung jeder Substitution ermitteln; es ist nämlich

$$b\int \frac{dx}{a+b \operatorname{tg} x} = \int \frac{b \cos x\, dx}{a \cos x + b \sin x}$$
$$= \int \frac{(-a \sin x + b \cos x)\,dx}{a \cos x + b \sin x} + a\int \frac{\sin x\, dx}{a \cos x + b \sin x};$$

multiplicirt man diese Gleichung mit b und addirt beiderseits $a^2 \int \frac{\cos x\, dx}{a \cos x + b \sin x}$ hinzu, so entsteht

$$(a^2+b^2)\int \frac{dx}{a+b \operatorname{tg} x} = b\, l.(a \cos x + b \sin x) + ax + C,$$

woraus für das Integral derselbe Ausdruck hervorgeht, wie er oben gefunden wurde.

251. Das Integral einer rationalen ganzen Function von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x, \ldots$ löst sich in Integrale von der Form

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx \tag{18}$$

auf. Durch die Substitution $\sin x = t$ geht dies in das Integral

$$\int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

eines binomischen Differentials über und könnte nach den in **242**—**243** gegebenen Methoden behandelt werden. Aus dieser letzten Form erkennt man, dass das obige Integral bei beliebigem m, n nur dann eine endliche Darstellung durch elementare Functionen zulässt, wenn

$$\frac{n-1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{m+1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{m+n}{2}$$

eine ganze Zahl ist; sind m, n ganze Zahlen, wie dies hier angenommen wird, so trifft mindestens eine dieser Bedingungen immer zu.

Es ist indessen vortheilhafter, das Integral (18) in seiner ursprünglichen Form zu belassen und durch Reduction der Exponenten m, n auf möglichst kleine Beträge gewisse einfache Integralformen herbeizuführen. Hierzu dienen die nachstehenden *Reductionsformeln.*

1) Partielle Integration mit der Zerlegung $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \sin^m x \cos x\, dx$ ergibt

$$\text{(I)} \qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx \quad (m+1 \lessgtr 0).$$

Kehrt man die Formel um und ersetzt gleichzeitig m durch $m-2$, n durch $n+2$, so wird

$$\text{(II)} \qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx \quad (n+1 \lessgtr 0).$$

2) Wird unter dem Integralzeichen rechts in (I)

$$\sin^{m+2} x \cos^{n-2} x = \sin^m x \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x)$$

gesetzt, so löst sich das betreffende Integral in zwei Integrale auf, deren eines mit dem linksstehenden übereinstimmt; nach gehöriger Vereinfachung hat man

(III)
$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n}$$
$$+ \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx \quad (m+n \lessgtr 0).$$

Die Umkehrung dieser Formel unter gleichzeitiger Erhöhung von n um 2 liefert

(IV)
$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1}$$
$$+ \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx \quad (n+1 \lessgtr 0).$$

3) Wenn in dem Integrale auf der rechten Seite von (II) $\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x$ durch $\sin^{m-2} x \cos^n x (1 - \sin^2 x)$ ersetzt und sonst derselbe Vorgang beobachtet wird wie unter 2), so entsteht

(V)
$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n}$$
$$+ \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx \quad (m+n \lessgtr 0).$$

Die Umkehrung dieser Formel bei Vermehrung von m um 2 gibt schliesslich

(VI)
$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1}$$
$$+ \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x\, dx \quad (m+1 \lessgtr 0).$$

Die Formeln (I) und (VI) verlieren ihre Anwendbarkeit für $m = -1$; dann aber kann das Integral $\int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$ durch (III) oder (IV) (jenachdem n positiv oder negativ) auf eines der Integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

gebracht werden.

Die Formeln (II) und (IV) werden illusorisch für $n = -1$; das entsprechende Integral $\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos x}$ kann aber mittels (V) oder (VI) auf eines der Integrale

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

reducirt werden.

Die Formeln (III) und (V) hören auf zu gelten für $m = -n$; die Integrale $\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\, dx$, $\int \frac{\cos^n x}{\sin^n x}\, dx$ sind aber mittels (II), resp. (I) zurückführbar auf eines der Integrale

$$\int dx, \quad \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x}, \quad \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x}.$$

Ausser auf die genannten können die Reductionsformeln nur noch auf die Endintegrale

$$\int \sin x\, dx, \qquad \int \cos x\, dx$$

hinleiten.

Alle Endintegrale sind elementar, und obwohl ihre Werte im Vorangehenden schon angegeben sind oder aus vorhandenen Formeln leicht abgeleitet werden können, sollen sie hier nochmals zusammengestellt werden:

$$\int dx = x, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x, \quad \int \cos x\, dx = \sin x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l.\operatorname{tg} \frac{x}{2}, \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = l.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l.\operatorname{tg} x,$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = l.\sin x, \qquad \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -l.\cos x,$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2}.$$

Man kann mitunter die Benützung der Reductionsformeln umgehen, z. B. dann, wenn einer der Exponenten m, n eine positive ungerade Zahl ist, oder auch sonst anderweitige Vereinfachungen eintreten lassen, wie dies aus den folgenden Beispielen zu entnehmen ist.

Beispiele. 1) Mit Benützung der Formel (III) findet man

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \frac{\sin^5 x \cos^2 x}{7} + \frac{2}{7}\int \sin^4 x \cos x\, dx$$

$$= \frac{\sin^5 x \cos^2 x}{7} + \frac{2}{35} \sin^5 x + C;$$

in anderer Weise: $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)\cos x$, daher

$$\int \sin^4 x \cos^3 dx = \int \sin^4 x \cos x\, dx - \int \sin^6 x \cos x\, dx$$
$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

2) Nach Formel (IV) ist

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} - 2\operatorname{cotg} x + C;$$

man kann aber auch folgenden Weg einschlagen: Es ist $dx = (\sin^2 x + \cos^2 x)dx$, daher

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$$

3) Zur Reduction der Integrale $\int \sin^m x\, dx$, $\int \cos^n x\, dx$ $(m, n > 0)$ ergeben sich aus (V), beziehungsweise (III), wenn man dort $n = 0$, hier $m = 0$ setzt, die Formeln

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\, dx \\ \displaystyle\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx; \end{cases}$$

in gleicher Weise erhält man durch Benützung von (VI) und (IV)

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$
$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Insbesondere ist beispielsweise

$$\int \sin^3 x\, dx = -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2}{3}\int \sin x\, dx$$
$$= -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} - \frac{2\cos x}{3} + C,$$

aber auch

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x\, dx - \int \cos^2 x \sin x\, dx$$
$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C;$$

ferner

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\, l.\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

252. Die Lösung des Integrals (18) bei positiven ganzen m, n, also auch die Integration einer rationalen ganzen Function von $\sin x$ und $\cos x$ kann auch auf einem andern Wege erfolgen, welcher darauf sich gründet, dass die Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ durch die Functionen der Vielfachen von x sich ausdrücken lassen. Diese Darstellung ergibt sich mittels der Formeln (**103**, (15))

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

wenn man beiderseits zu einer positiven ganzen Potenz erhebt, rechts von der Binomialformel Gebrauch macht und die symmetrisch angeordneten Glieder zusammenfasst, so erhält man mit Benützung eben derselben Formeln die folgenden Gleichungen:

$$(20)\left\{\begin{aligned}
\sin^{2p} x &= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \Big\{\cos 2px - \binom{2p}{1}\cos(2p-2)x \\
&\quad + \binom{2p}{2}\cos(2p-4)x - \cdots + (-1)^{p-1}\binom{2p}{p-1}\cos 2x \\
&\quad + \frac{1}{2}(-1)^p\binom{2p}{p}\Big\} \\
\sin^{2p+1} x &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \Big\{\sin(2p+1)x - \binom{2p+1}{1}\sin(2p-1)x \\
&\quad + \binom{2p+1}{2}\sin(2p-3)x + \cdots + (-1)^p\binom{2p+1}{p}\sin x\Big\} \\
\cos x^{2p} &= \frac{1}{2^{2p-1}} \Big\{\cos 2px + \binom{2p}{1}\cos(2p-2)x \\
&\quad + \binom{2p}{2}\cos(2p-4)x + \cdots + \binom{2p}{p-1}\cos 2x + \frac{1}{2}\binom{2p}{p}\Big\} \\
\cos^{2p+1} x &= \frac{1}{2^{2p}} \Big\{\cos(2p+1)x + \binom{2p+1}{1}\cos(2p-1)x \\
&\quad + \binom{2p+1}{2}\cos(2p-3)x + \cdots + \binom{2p+1}{p}\cos x\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Ist nun eine ganze Function von $\sin x$, $\cos x$ gegeben und entwickelt man alle Potenzen nach den Formeln (20), so ordnet

sich der ganze Ausdruck zu einem Aggregate von Gliedern, die von Coefficienten abgesehen eine der drei Formen

$$\sin\lambda x \sin\mu x, \qquad \cos\lambda x \cos\mu x, \qquad \sin\lambda x \cos\mu x$$

aufweisen; dabei bedeuten λ, μ positive ganze Zahlen; die Integration führt sich also zurück auf die Formeln

$$(21)\begin{cases} \int \sin\lambda x \sin\mu x\,dx = \frac{1}{2}\int[\cos(\lambda-\mu)x - \cos(\lambda+\mu)x]\,dx \\ \qquad = \frac{\sin(\lambda-\mu)x}{2(\lambda-\mu)} - \frac{\sin(\lambda+\mu)x}{2(\lambda+\mu)} \\ \int \cos\lambda x \cos\mu x\,dx = \frac{1}{2}\int[\cos(\lambda-\mu)x + \cos(\lambda+\mu)x]\,dx \\ \qquad = \frac{\sin(\lambda-\mu)x}{2(\lambda-\mu)} + \frac{\sin(\lambda+\mu)x}{2(\lambda+\mu)} \\ \int \sin\lambda x \cos\mu x\,dx = \frac{1}{2}\int[\sin(\lambda+\mu)x + \sin(\lambda-\mu)x]\,dx \\ \qquad = -\frac{\cos(\lambda+\mu)x}{2(\lambda+\mu)} - \frac{\cos(\lambda-\mu)x}{2(\lambda-\mu)}. \end{cases}$$

Beispielsweise führt dieser Vorgang zu folgenden Resultaten:

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 4x}{4} - 2\sin 2x + 3x\right) + C$$

$$\int \sin^5 x\,dx = \frac{1}{16}\int(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\left(-\frac{\cos 5x}{5} + \frac{5\cos 3x}{3} - 10\cos x\right) + C$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int(1 - \cos 4x)\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

253. Bedeutet $f(x)$ eine rationale Function von x, welche sich in die ganze Function $G(x)$ und den irreductibeln echten Bruch $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ zerlegen lässt, so lösen sich dieser Zerlegung gemäss auch die Integrale

$$(22) \qquad \int f(x)\sin x\,dx, \qquad \int f(x)\cos x\,dx$$

in je zwei Integrale auf. Auf das erste lässt sich mit Erfolg partielle Integration anwenden in dem Sinne, dass man $u = G(x)$, $dv = \sin x\,dx$, beziehungsweise $= \cos x\,dx$ nimmt; man erhält so

$$(23)\quad \begin{cases} \int G(x) \sin x\,dx = - G(x) \cos x + \int G'(x) \cos x\,dx \\ \int G(x) \cos x\,dx = \quad G(x) \sin x - \int G'(x) \sin x\,dx; \end{cases}$$

wird auf das rechtsstehende Integral der ersten Gleichung die zweite Reductionsformel und umgekehrt angewendet, so ergeben sich

$$(24)\quad \begin{cases} \int G(x) \sin x\,dx \\ = - G(x) \cos x + G'(x) \sin x - \int G''(x) \sin x\,dx \\ \int G(x) \cos x\,dx \\ = \quad G(x) \sin x + G'(x) \cos x - \int G''(x) \cos x\,dx, \end{cases}$$

Reductionsformeln, durch welche das linksstehende Integral auf ein solches derselben Art zurückgeführt wird, in welchem aber der Grad der ganzen Function um zwei Einheiten niedriger ist. Durch Benützung der Formeln (24) und (23) kann man diesen Grad schliesslich auf Null bringen und die Reduction bis zu den Grundintegralen $\int \sin x\,dx$, $\int \cos x\,dx$ führen.

Bei dem zweiten Theile der Integrale (22) liefert eine einfache reelle Wurzel a des Nenners $\varphi(x)$ einen Bestandtheil, der vom Coefficienten abgesehen lautet

$$\int \frac{\sin x}{x - a}\,dx, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int \frac{\cos x}{x - a}\,dx;$$

setzt man $x - a = t$, so wird

$$\int \frac{\sin x}{x - a}\,dx = \cos a \int \frac{\sin t\,dt}{t} + \sin a \int \frac{\cos t\,dt}{t}$$

$$\int \frac{\cos x}{x - a}\,dx = \cos a \int \frac{\cos t\,dt}{t} - \sin a \int \frac{\sin t\,dt}{t},$$

d. h. beide Formen lassen sich durch den Integralsinus und den Integralcosinus darstellen.

Eine mehrfache reelle Wurzel a von $\varphi(x)$ gibt Anlass zu Integralen der Form

$$\int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^n}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^n};$$

wendet man auf diese partielle Integration an in der Weise, dass $dv = \frac{dx}{(x-a)^n}$ gesetzt wird, so kommt

$$(25) \begin{cases} \int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^n} = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^{n-1}} \\ \int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^n} = -\frac{\cos x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^{n-1}} \end{cases}$$

und nach nochmaliger Reduction der rechts verbleibenden Integrale

$$(26) \begin{cases} \int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^n} = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)(x-a)^{n-2}} \\ \qquad - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^{n-2}} \\ \int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^n} = -\frac{\cos x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)(x-a)^{n-2}} \\ \qquad - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^{n-2}}. \end{cases}$$

Durch Anwendung der Formeln (26) und (25) kommt man schliesslich zu den bereits besprochenen Integralen

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x-a}, \quad \int \frac{\cos x\, dx}{x-a}$$

zurück, die eine endliche Darstellung nicht zulassen.

Beispiel. Um das Integral

$$\int \frac{x^4+1}{x^2-1} \sin x\, dx$$

zu bestimmen, zerlege man

$$\frac{x^4+1}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{2}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

und findet nun auf Grund des vorstehenden

$$\int \frac{x^4+1}{x^2-1} \sin x \, dx$$
$$= - x^2 \cos x + 2x \sin x + \cos x + 2 \sin 1 \int \frac{\cos x \, dx}{x}.$$

254. Bedeutet $G(x)$ eine ganze Function von x und wendet man auf die beiden Integrale

$$(27) \qquad \int G(x) e^{ax} \sin bx \, dx, \qquad \int G(x) e^{ax} \cos bx \, dx$$

partielle Integration an mit $u = G(x) e^{ax}$, also

$$du = a G(x) e^{ax} dx + G'(x) e^{ax} dx,$$

so ergibt sich

$$\int G(x) e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} G(x) e^{ax} \cos bx$$
$$+ \frac{a}{b} \int G(x) e^{ax} \cos bx \, dx + \frac{1}{b} \int G'(x) e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$\int G(x) e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} G(x) e^{ax} \sin bx$$
$$- \frac{a}{b} \int G(x) e^{ax} \sin bx \, dx - \frac{1}{b} \int G'(x) e^{ax} \sin bx \, dx;$$

diese Gleichungen sind in Bezug auf die zu bestimmenden zwei Integrale (27) linear; löst man sie darnach auf, so erhält man

$$(28) \left\{ \begin{aligned} &\int G(x) e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} G(x) e^{ax} \\ &+ \frac{b}{a^2+b^2} \int G'(x) e^{ax} \cos bx \, dx - \frac{a}{a^2+b^2} \int G'(x) e^{ax} \sin bx \, dx \\ &\int G(x) e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} G(x) e^{ax} \\ &- \frac{a}{a^2+b^2} \int G'(x) e^{ax} \cos bx \, dx - \frac{b}{a^2+b^2} \int G'(x) e^{ax} \sin bx \, dx. \end{aligned} \right.$$

Fortgesetzte Anwendung dieser Formeln bringt die ganze Function schliesslich auf den Grad Null herab, so dass als Endintegrale, vom Coefficienten abgesehen,

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx, \qquad \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

zum Vorschein kommen; die für dieselben geltenden Werte ergeben sich aber aus (28) selbst, wenn man $G(x) = 1$ setzt; man findet nämlich

$$(29)\quad \begin{cases} \displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C \\ \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C. \end{cases}$$

So ergibt sich beispielsweise aus der Anwendung der ersten Formel (28) und der beiden Formeln (29)

$$\int x e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{(a\sin bx - b\cos bx)x}{a^2+b^2}\,e^{ax} + \frac{2ab\cos bx - (a^2-b^2)\sin bx}{(a^2+b^2)^2}\,e^{ax} + C.$$

Dritter Abschnitt.

Einfache und mehrfache bestimmte Integrale.

§ 1. Wertbestimmung und Schätzung bestimmter Integrale.

255. Die Auswertung eines bestimmten Integrals gestaltet sich dann am einfachsten, wenn die *unbestimmte Integration* in endlicher Form sich vollziehen lässt, d. h. wenn eine in dem Integrationsintervalle (a, b) stetige, durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck dargestellte Function $F(x)$ angegeben werden kann, deren Differentialquotient an jeder Stelle durch den Wert der zu integrirenden Function $f(x)$ bestimmt ist; nach dem *Hauptsatze der Integral-Rechnung* (**219**) ist nämlich in diesem Falle

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

so dass es also nur auf die Ausrechnung und Subtraction zweier besonderen Werte der Function $F(x)$ ankommt.

Angesichts der unerschöpflichen Mannigfaltigkeit von Formen, welche die Function $f(x)$ anzunehmen vermag, ist die Zahl der Fälle, wo von diesem Verfahren Gebrauch gemacht werden kann, allerdings eine sehr kleine; die Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik führen aber solche Fälle häufig genug herbei, und einige Integralformeln, welche auf diesem Wege abgeleitet werden können, treten sowohl in den Anwendungen wie in der weiteren Entwicklung der Theorie so oft auf, dass es sich empfiehlt, sie hier zusammenzustellen.

Beispiele. 1) Für $n > 0$ und beliebige a und b ist

$$\int_a^b x^n\,dx = \left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\}_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}; \tag{2}$$

dieselbe Formel gilt auch für negative n mit Ausschluss von $n = -1$, wenn a, b gleich bezeichnet sind. Insbesondere ist für $n > 0$

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}. \tag{3}$$

Der Fall $n = -1$ führt, wenn a, b gleich bezeichnet sind, zu der Formel

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l.\frac{b}{a} \tag{4}$$

und zu der allgemeineren

$$\int_a^b \frac{dx}{\alpha + x} = l.\frac{\alpha + b}{\alpha + a}, \tag{5}$$

wenn $\alpha + a$ und $\alpha + b$ gleich bezeichnet sind (**220**, 1)).

2) Aus den Grundformeln ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left\{\operatorname{arctg} x\right\}_0^1 = \frac{\pi}{4}; \tag{6}$$

durch die Substitution $x = at$ findet man allgemeiner

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\left\{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right\}_0^a = \frac{\pi}{4a}. \tag{7}$$

3) Nach **222**, 2) ist

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right\}_0^a = \frac{\pi a^2}{4}. \tag{8}$$

4) Wenn $\varkappa > 0$, so ist laut **239**, (26)

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\varkappa + x^2}} = \left\{l.(x + \sqrt{\varkappa + x^2})\right\}_0^a = l.\frac{a + \sqrt{\varkappa + a^2}}{\sqrt{\varkappa}}, \tag{9}$$

darnach ist beispielsweise

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l.(1 + \sqrt{2}).$$

5) Unter der Voraussetzung, dass $m \gtrless 0$ und $n \gtrless 0$, sei der Wert des Integrals

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = J(m, n)$$

zu bestimmen. Vor allem erkennt man auf Grund von 1), dass

$$J(m, 0) = \frac{1}{m+1}, \qquad J(0, n) = \frac{1}{n+1};$$

ferner zeigt die Substitution $x = 1 - t$, dass

$$J(m, n) = \int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt = J(n, m),$$

dass also die Vertauschung der Exponenten m, n keine Änderung an dem Werte des Integrals hervorbringt. Schliesslich ergibt partielle Integration mit der Zerlegung $u = (1-x)^n$, $dv = x^m dx$

$$J(m, n) = \left\{ \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} \right\}_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} dx.$$

Ist n *eine ganze Zahl*, so gibt n-malige Anwendung dieser Formel

$$J(m, n) = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} J(m+n, 0)$$

$$= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}.$$

Ebenso ist, wenn m *eine ganze Zahl*, vermöge $J(m, n) = J(n, m)$,

$$J(m, n) = \frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)}.$$

Sind m und n beides ganze Zahlen, so kommt

$$J(m, n) = \frac{m! \, n!}{(m+n+1)!}. \tag{10}$$

Hiernach ist beispielsweise

$$\int_0^1 (1-x)^3 \sqrt{x} \, dx = \frac{6}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{32}{315} = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x} \, dx$$

und

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx = \frac{3!\,4!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

6) Nach den Grundformeln ist

$$(11)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big\{\cos x\Big\}_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big\{\sin x\Big\}_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

dagegen

$$(12)\quad \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big\{\cos x\Big\}_{\pi}^{0} = 2, \quad \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \Big\{\sin x\Big\}_0^{\pi} = 0.$$

7) Durch Anwendung des Satzes 217, 5) ergibt sich aus der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

und aus der Formel $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos z\,dz = 0;$$

daraus folgt

$$(13)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Die Substitution $x = \frac{\pi}{2} - z$ zeigt, dass ganz allgemein für jedes $n > 0$

$$(14)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

8) Nach Formel 251, (19) ist (n als ganze Zahl $\gtreqless 2$ vorausgesetzt)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\left\{\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}\right\}_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx;$$

für $n = 2p$ gibt p-mal wiederholte Anwendung dieser Reductionsformel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}x\,dx = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p\cdot(2p-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2}; \tag{15}$$

für $n = 2p+1$ erhält man unter Berücksichtigung von (11)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}x\,dx = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}. \tag{16}$$

Bemerkenswert ist die Transcendenz des Resultates im ersten und seine Rationalität im zweiten Falle.

Mit Hilfe der Formeln (15) und (16) lässt sich die transcendente Zahl $\frac{\pi}{2}$ zwischen beliebig enge rationale Grenzen einschliessen. In dem Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist nämlich

$$\sin^{2p-1}x \geqq \sin^{2p}x \geqq \sin^{2p+1}x,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur an den Grenzen des Intervalls Geltung hat; daraus folgt (217, 6)), dass auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}x\,dx,$$

also

$$\frac{2\cdot 4\cdots(2p-2)}{3\cdot 5\cdots(2p-1)} > \frac{1\cdot 3\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdots 2p}\,\frac{\pi}{2} > \frac{2\cdot 4\cdots 2p}{3\cdot 5\cdots(2p+1)},$$

woraus

$$\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdots(2p-2)2p}{1\cdot 3\cdot 3\cdots(2p-1)(2p-1)} > \frac{\pi}{2} > \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdots 2p\cdot 2p}{1\cdot 3\cdot 3\cdots(2p-1)(2p+1)};$$

nun ist die obere Grenze

$$\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdots(2p-2)2p}{1\cdot 3\cdot 3\cdots(2p-1)(2p-1)} = \frac{2\cdot 2\cdots 2p\cdot 2p}{1\cdot 3\cdots(2p-1)(2p+1)}\cdot\frac{2p+1}{2p},$$

daher weiter

$$1+\frac{1}{2p} > \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2\cdot 2\cdots 2p\cdot 2p}{1\cdot 3\cdots(2p-1)(2p+1)}} > 1.$$

Daraus schliesst man, dass

$$(17)\qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{p=+\infty}\frac{2\cdot 2\cdots 2p\cdot 2p}{1\cdot 3\cdots(2p-1)(2p+1)} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots}.$$

Diese Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ durch ein convergentes unendliches Product (78, 4)) hat zuerst John Wallis, und zwar vor Erfindung der Infinitesimalrechnung, gegeben; nach ihm heisst (17) die *Wallis'sche Formel.*

9) Nach Formel **244**, 3) ist

$$(18)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)\right\}_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2ab}$$
$$(ab>0).$$

256. Wenn die unbestimmte Integration sich nicht ausführen lässt, so muss zu andern Hilfsmitteln der Auswertung des Integrals gegriffen werden. Solche werden im weiteren Verlaufe zur Sprache gebracht werden. Häufig aber, namentlich bei theoretischen Untersuchungen, handelt es sich um eine blosse *Schätzung* des Integralwertes, um seine Einschliessung zwischen Grenzen. Die wichtigsten darauf bezüglichen Sätze werden in diesem und den beiden folgenden Artikeln entwickelt werden.

Das nächstliegende Mittel zur Abschätzung des Wertes eines bestimmten Integrals bietet der in **217**, 6) nachgewiesene Satz, wornach zwischen dem kleinsten und grössten Werte der Function $f(x)$ eine Zahl μ liegt, derart, dass

$$(19)\qquad \int_a^b f(x)dx = (b-a)\mu.$$

Bestimmt man demnach den kleinsten Wert m und den grössten Wert M von $f(x)$ in (a, b), so stellen $(b-a)m$ und

$(b-a)M$ eine untere und eine obere Grenze für den Wert des Integrals dar.

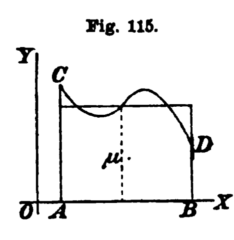
Ist $f(x)$ stetig in (a, b), so lässt sich ein positiver echter Bruch θ so bestimmen, dass $\mu = f[a + \theta(b-a)]$ ist; bezeichnet ferner $F(x)$ eine stetige Function, welche $f(x)$ als Differentialquotienten ergibt, so ist $F(b) - F(a)$ eine zweite Darstellung des Integralwertes und daher nach (19)

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(a + \theta(b-a));$$

dies aber ist der Ausdruck für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (37).

Wie schon an der oben citirten Stelle erwähnt worden ist, nennt man die Zahl μ den *Mittelwert der Function* $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) in Bezug auf die Variable x. Drückt beispielsweise $f(x)$ die Geschwindigkeit eines beweglichen Punktes zur Zeit x aus, so bedeutet μ die *mittlere Geschwindigkeit* in dem Zeitraume (a, b). Ist $f(x)$ die zur Abscisse x gehörige Ordinate einer Curve CD, Fig. 115, so ist μ die *mittlere Ordinate* des Bogens CD und zugleich die Höhe jenes Rechtecks über der Basis AB, welches mit der Figur $ABDC$ gleiche Fläche hat.

Fig. 115.



Ein anderes Hilfsmittel der Wertschätzung gründet sich auf den am Schlusse von 217, 6) erwiesenen Satz. Gelingt es nämlich, zwei Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ anzugeben, welche die zu integrirende Function $f(x)$ einschliessen derart, dass für alle Werte von x, für die $a \leq x \leq b$,

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

wobei jedoch die Gleichheitszeichen nicht durchgehends gelten, so ist dem angezogenen Satze zufolge auch

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx. \tag{20}$$

Lassen sich die Werte der beiden äussern Integrale bestimmen, so sind damit Grenzen für das vorgelegte Integral gewonnen.

Beispiele. 1) Es ist die mittlere Krümmung und der mittlere Krümmungsradius der Normalschnitte für einen Punkt einer krummen Fläche zu bestimmen.

Dem Euler'schen Satze (199, (15)) zufolge drückt sich die Krümmung $\frac{1}{R}$ eines Normalschnittes durch die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ der beiden Hauptnormalschnitte und den Winkel ω, welchen die zu $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{R_1}$ gehörigen Ebenen bilden, derart aus, dass

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}.$$

Da $\frac{1}{R}$ alle Werte annimmt, deren es fähig ist, während ω das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ durchläuft, so ist die mittlere Krümmung

$$\mu\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}\right) d\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

also gleich dem arithmetischen Mittel der Krümmungen der Hauptnormalschnitte (208).

Für den mittleren Krümmungsradius ergibt sich dagegen der Ausdruck

$$\mu(R) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}};$$

aber nur für einen elliptischen Punkt bleibt die Function unter dem Integralzeichen in dem Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ endlich. Da in diesem Falle R_1, R_2 gleich bezeichnet sind, so hat man nach Formel 255, (18)

$$\mu(R) = \sqrt{R_1 R_2},$$

so dass der mittlere Radius gleich ist dem geometrischen Mittel der Hauptkrümmungsradien.

2) Um Grenzen für das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^n}} \qquad (n > 2)$$

zu erhalten, beachte man, dass mit alleinigem Ausschluss der unteren Grenze im ganzen Integrationsintervalle

$$1 > \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

also auch

$$\int_0^1 dx > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

d. i. nach **255**, 4)

$$1 > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > l.(1+\sqrt{2}) = 0{\cdot}8814\ldots.$$

3) Für das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}} \qquad (\varkappa^2 < 1)$$

ergeben sich Grenzen aus der Bemerkung, dass mit Ausschluss der untern Grenze

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} < \frac{1}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi};$$

daraus folgt nämlich

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + (1-\varkappa^2)\sin^2\varphi},$$

d. i. nach **255**, 9)

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} < \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varkappa^2}};$$

die Grenzen liegen um so enger beisammen, je näher $\varkappa$ an Null ist.

256. Die zu integrirende Function lasse sich in zwei Factoren $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zerlegen; von beiden setzen wir voraus, dass sie in dem Integrationsintervalle (a, b) einschliesslich der Grenzen endlich und stetig bleiben, von dem einen Factor, z. B. $\psi(x)$, überdies, dass er daselbst nirgends negativ (oder niemals positiv) sei.

Bezeichnet nun m den kleinsten, M den grössten der Werte, welche $\varphi(x)$ in (a, b) annimmt, so ist für alle Werte von x aus diesem Intervalle

$$m \leqq \varphi(x) \leqq M,$$

wobei das Gleichheitszeichen nicht durchgehends Geltung hat; für solche Werte von x ist also auch, wenn $\psi(x)$ beständig positiv,

$$m\psi(x) \leqq \varphi(x)\psi(x) \leqq M\psi(x)$$

und daher

$$(21) \qquad m\int_a^b \psi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < M\int_a^b \psi(x)\,dx\,.$$

Demnach gibt es nothwendig eine zwischen m und M gelegene Zahl μ von solcher Beschaffenheit, dass geradezu

$$(22) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \mu\int_a^b \psi(x)\,dx\,.$$

Weil $\varphi(x)$ als stetig vorausgesetzt wurde, so erreicht es den Wert μ auch sicher mindestens an *einer* zwischen a, b gelegenen Stelle $a + \theta(b - a)$, $[\theta < 1]$, so dass

$$(23) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(a + \theta(b - a))\int_a^b \psi(x)\,dx\,.$$

Der Inhalt dieser Formel pflegt als *erster Mittelwertsatz* bezeichnet zu werden. Die Formel (22) ist insofern allgemeiner als (23), als sie auch dann Geltung hat, wenn die Function $\varphi(x)$ zwar endlich, aber nicht durchaus stetig ist; dann braucht sie nämlich den Mittelwert μ nicht anzunehmen.

Die Formel (22) oder die Ungleichung (21) führt zu einer Abschätzung des Wertes von $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx$, wenn sich das Integral $\int_a^b \psi(x)\,dx$ bestimmen lässt.

Wäre $F(x)$ ein Integral von $\varphi(x)\psi(x)$, $G(x)$ ein Integral von $\psi(x)$, so dass

$$F'(x) = \varphi(x)\psi(x),$$
$$G'(x) = \psi(x),$$

also

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \varphi(x),$$

so lautete die Formel (23)

$$F(b) - F(a) = \frac{F'(b + \theta(b-a))}{G'(b + \theta(b-a))}[G(b) - G(a)],$$

woraus

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(a + \theta(b-a))}{G'(a + \theta(b-a))};$$

dies aber fällt mit dem Inhalte des erweiterten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (38) überein.

Beispiele. 1) Für das Integral

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} \qquad (\varkappa^2 < 1, \quad 0 < a < 1)$$

können Grenzen gewonnen werden, indem man die Function in die Factoren $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2 x^2}}$ zerlegt; der kleinste Wert des letzteren auf dem Integrationsintervalle ist 1, der grösste Wert $\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2 a^2}}$; infolge dessen ist, da

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin a,$$

$$\arcsin a < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} < \frac{\arcsin a}{\sqrt{1-\varkappa^2 a^2}};$$

die Grenzen sind um so enger, je kleiner a und $\varkappa$ sind; sie betragen beispielsweise für $\varkappa = \frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{2}$. 0·52359.. und 0·55109 . . .

2) Zerlegt man in dem Integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2} x^2 \, dx$$

die zu integrirende Function in die Factoren x und xe^{-x^2}, deren erster 0 zum kleinsten, 1 zum grössten Werte hat, so ergibt sich

$$0 < \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx < \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \frac{1-e}{2e} = 0{\cdot}316 \ldots .$$

3) Es sei $f(z)$ eine in dem Intervalle $(x, x+h)$ nebst ihren Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung eindeutige und stetige Function. Setzt man in $f(z), f'(z), \ldots f^{(n)}(z)$

$$z = x + h - t,$$

so kommen den Functionen $f(x+h-t), f'(x+h-t), \ldots f^{(n)}(x+h-t)$ dieselben Eigenschaften in dem Intervalle $(0, h)$ der neuen Variabeln t zu. Mit Hilfe der partiellen Integration findet man

$$\int_0^h f'(x+h-t)\,dt = \Big\{t f'(x+h-t)\Big\}_0^h + \int_0^h t f''(x+h-t)\,dt,$$

also

$$\int_0^h f'(x+h-t)\,dt = h f'(x) \quad + \int_0^h \frac{t}{1} f''(x+h-t)\,dt,$$

ebenso

$$\int_0^h \frac{t}{1} f''(x+h-t)\,dt = \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(x) \;+ \int_0^h \frac{t^2}{1\cdot 2} f'''(x+h-t)\,dt$$

$$\int_0^h \frac{t^2}{1\cdot 2} f'''(x+h-t)\,dt = \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x) + \int_0^h \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3} f^{IV}(x+h-t)\,dt,$$

. . . .

schliesslich

$$\int_0^h \frac{t^{n-2}}{1\cdot 2\cdots(n-2)} f^{(n-1)}(x+h-t)\,dt = \frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$
$$+ \int_0^h \frac{t^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n)}(x+h-t)\,dt.$$

Bildet man die Summe aus diesen Gleichungen und beachtet dabei, dass

$$\int_0^h f'(x+h-t)\,dt = \Big\{-f(x+h-t)\Big\}_0^h = f(x+h) - f(x),$$

so kommt

$$(24)\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x) + \cdots \\ + \frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{t^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n)}(x+h-t)\,dt. \end{cases}$$

Dies aber ist die Taylor'sche Formel (90, (3)), wobei das Restglied in der Gestalt eines bestimmten Integrals auftritt. Durch Anwendung des vorstehenden Mittelwertsatzes kann daraus die von Lagrange angegebene Restformel (90, (7)) gewonnen werden; zerlegt man nämlich die Function unter dem Integralzeichen in die Factoren $\frac{t^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$ und $f^{(n)}(x+h-t)$ und integrirt den ersten, so hat man nach Formel (23) zu setzen

$$\int_0^h \frac{t^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n-1}f^{(n)}(x+h-t)\,dt = \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x+h-\vartheta h),$$

wobei $0 < \vartheta < 1$; schreibt man für $1-\vartheta$, das wieder ein positiver echter Bruch ist, θ, so ergibt sich thatsächlich die endgiltige Form

$$\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

257. Die zu integrirende Function lasse sich in zwei Factoren $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zerlegen, von welchen vorausgesetzt wird, dass sie in dem Integrationsintervalle (a, b) einschliesslich der Grenzen eindeutig, endlich und stetig sind, dass aber ferner einer davon, z. B. $\psi(x)$, *monoton verläuft* (17), d. h. entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt, so dass $d\psi(x)$ keinen Zeichenwechsel erfährt, während x von a nach b läuft.

Bezeichnet $\Phi(x)$ ein Integral von $\varphi(x)$, also eine stetige Function mit dem Differentialquotienten $\varphi(x)$, so gibt partielle Integration

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \Big\{\psi(x)\Phi(x)\Big\}_a^b - \int_a^b \Phi(x)\,d\psi(x);$$

das Integral rechter Hand erfüllt nun alle Bedingungen, welche zur Anwendung des ersten Mittelwertsatzes erforderlich sind;

es lässt sich also eine Stelle ξ zwischen a und b derart bestimmen, dass

$$\int_a^b \Phi(x)d\psi(x) = \Phi(\xi)\int_a^b d\psi(x) = \Phi(\xi)[\psi(b) - \psi(a)].$$

Wird dies in die obige Gleichung eingetragen, so kommt

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \psi(b)\Phi(b) - \psi(a)\Phi(a) - \Phi(\xi)[\psi(b) - \psi(a)]$$
$$= \psi(a)[\Phi(\xi) - \Phi(a)] + \psi(b)[\Phi(b) - \Phi(\xi)];$$

vermöge der Bedeutung von $\Phi(x)$ ist aber

$$\Phi(\xi) - \Phi(a) = \int_a^\xi \varphi(x)dx, \qquad \Phi(b) - \Phi(\xi) = \int_\xi^b \varphi(x)dx,$$

daher hat man endgiltig

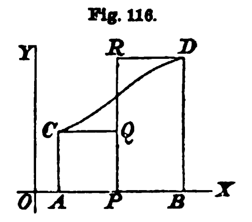
$$(25) \qquad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \psi(a)\int_a^\xi \varphi(x)dx + \psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)dx$$
$$(a < \xi < b).$$

Der Inhalt dieser Formel wird als der *zweite Mittelwertsatz* bezeichnet. Für $\varphi(x) = 1$ lautet sie

$$(26) \qquad \int_a^b \psi(x)dx = (\xi - a)\psi(a) + (b - \xi)\psi(b)$$

und hat dann, wenn man $\psi(x)$ als die zur Abscisse x gehörige Ordinate auffasst, einen einfachen geometrischen Ausdruck. Sie besagt, dass sich die von einer niemals fallenden (oder niemals steigenden) Curve CD, Fig. 116, begrenzten Fläche $ABDC$ als Summe zweier Rechtecke $APQC$ und $PBDR$ darstellen lasse, deren Grundlinien AP, PB zusammen AB ausmachen und deren Höhen die Anfangsordinate AC und die Endordinate BD sind.

Fig. 116.



§ 2. Erweiterung des Integralbegriffs.

258. Die Begriffsentwicklung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

wie sie in 213—214 erfolgt ist, gründet sich auf zwei wesentliche Voraussetzungen: dass die Function $f(x)$ in dem Integrationsintervalle (a, b) mit Einschluss seiner Grenzen eindeutig bestimmt und stetig oder zum mindesten begrenzt ist (in welch' letzterem Falle sie noch eine weitere Bedingung erfüllen muss (214)), und dass das Intervall (a, b) selbst endlich ist.

Man kann nun den Integralbegriff in zweifachem Sinne erweitern: Einmal, indem man ihn auch auf solche Functionen auszudehnen sucht, welche im Integrationsintervalle oder an seinen Grenzen unendlich werden; und dann, dass man ihn sinngemäss auch auf den Fall zu übertragen sucht, wo das Integrationsintervall nach einer oder nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckt, wobei selbstverständlich vorausgesetzt wird, dass die Function $f(x)$ für alle reellen Werte von x definirt ist.

Diese Begriffserweiterungen gründen sich darauf, dass das Integral der ursprünglichen Definition eine stetige Function seiner Grenzen ist (217, 8)).

Man pflegt Integrale, bei welchen die oben angeführten Bedingungen bestehen und die demnach Grenzwerte von Summen darstellen, *eigentliche bestimmte Integrale*, dagegen die aus der Begriffserweiterung hervorgehenden Integrale *uneigentliche bestimmte Integrale* zu nennen.

259. Wir beginnen mit der Untersuchung von Integralen *unendlich werdender Functionen.*

Die Function $f(x)$ sei in jedem Theile (a, x') des Intervalls (a, b) endlich und stetig, werde aber unendlich gross bei dem Grenzübergange $\lim x' = b - 0$, oder wie man sagt, an der oberen Grenze von (a, b). Dann ist, solange $a < x' < b$,

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx = \Phi(x')$$

eine stetige Function von x', und bleibt sie stetig bei dem Grenzübergange $\lim x' = b - 0$, so definirt man den bestimmten endlichen Grenzwert $\lim\limits_{x'=b-0} \Phi(x')$ als das über (a, b) erstreckte Integral von $f(x)$, bezeichnet es wieder durch das Symbol $\int\limits_a^b f(x)dx$ und hat daher für dieses die erklärende Gleichung

$$(1) \qquad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{x'=b-0} \int\limits_a^{x'} f(x)dx.$$

Die Stetigkeit von $\Phi(x')$ bei dem Grenzübergange $\lim x' = b - 0$ erfordert (17), dass sich eine linksseitige Umgebung $(b - \delta, b)$ von b bestimmen lasse derart, dass für irgend zwei Werte $x' < x''$ aus derselben die Differenz $\Phi(x'') - \Phi(x')$ dem Betrage nach kleiner ist als eine vorbezeichnete beliebig kleine positive Zahl ε, dass also

$$(2) \qquad \left| \int\limits_a^{x''} f(x)dx - \int\limits_a^{x'} f(x)dx \right| = \left| \int\limits_{x'}^{x''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Hat hingegen $\Phi(x')$ bei $\lim x' = b - 0$ den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ oder nähert er sich dabei keiner Grenze, so ist $\int\limits_a^b f(x)dx$ ein Symbol ohne Bedeutung.

In manchen Fällen kann die Grenzbetrachtung entfallen, wenn es nämlich gelingt, durch eine Transformation der Variabeln das Integral in ein anderes mit endlich bleibender Function und endlichem Integrationsintervalle umzuwandeln, d. h. in ein eigentliches Integral zu transformiren; der Wert des letzteren wird dann naturgemäss auch als Wert des ursprünglichen aufzufassen sein. Insofern jedes Integral von der hier betrachteten Art, das einen bestimmten Wert hat, durch eine passend gewählte Transformation der Integrationsvariabeln in ein eigentliches Integral umgesetzt werden kann, trifft die Bezeichnung „uneigentliches Integral" nicht das Wesen, sondern nur die Form des Ausdrucks.

Wenn die unbestimmte Integration von $f(x)$ ausgeführt werden kann und wenn die Function $F(x)$, die für alle Werte von x, für welche $a \leq x < b$, $f(x)$ als Differentialquotienten

gibt, stetig bleibt bis an die obere Grenze b, an welcher sie den Wert $F(b)$ annimmt, so ist

$$\lim_{x'=b-0} \int_a^{x'} f(x)dx = \lim_{x'=b-0} F(x') - F(a) = F(b) - F(a)$$

und daher

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

so dass auch in diesem Falle der Hauptsatz der Integralrechnung Giltigkeit hat.

Würde die Function $f(x)$ statt an der oberen an der unteren Grenze unendlich, also bei dem Grenzübergange $\lim x = a + 0$, so wäre der Gleichung (1) entsprechend

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{x'=a+0} \int_{x'}^b f(x)dx,$$

vorausgesetzt, dass der rechts angeschriebene Grenzwert wirklich existirt.

Fiele der Unendlichkeitspunkt von $f(x)$ in das Innere des Intervalls, an eine Stelle c, so hätte man (a, b) zu zerlegen in die Theilintervalle (a, c), (c, b) und dementsprechend zu setzen

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{x'=c-0} \int_a^{x'} f(x)dx + \lim_{x''=c+0} \int_{x''}^b f(x)dx,$$

wenn die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite wirklich vorhanden sind.

Es bedarf keiner weiteren Bemerkung, wie man sich zu benehmen hätte, wenn die Function $f(x)$ an mehreren vereinzelten Stellen von (a, b) unendlich werden sollte.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

bezieht sich auf eine Function, die an der oberen Grenze unendlich wird; es hat indessen einen bestimmten Wert. Dies geht einmal daraus hervor, dass es durch die Substitution $x = \sin t$ in das eigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

sich verwandelt, dessen Wert $\frac{\pi}{2}$ ist; andererseits ist das unbestimmte Integral $\arcsin x$ stetig in dem Intervalle $(0, 1)$ mit Einschluss der Grenzen, daher ist nach (3)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Bei dem allgemeinen Integrale

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

wo die Quadratwurzel, wie immer, positiv zu nehmen ist, bestehen ähnliche Verhältnisse; setzt man

$$x = a \sin t, \quad \text{woraus} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a \cos t,$$

so ergeben sich vermöge der letzteren Gleichung, da ihre linke Seite positiv ist, für die neue Variable t die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn $a > 0$, dagegen $\pi, \frac{\pi}{2}$, wenn $a < 0$; daher ist

$$(7) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \quad \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } a > 0; \\ \text{und} & \\ \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} dt = -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

2) Es sei $a < b$ und n eine positive Zahl; dann hat das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n},$$

das an der oberen Grenze eine Singularität aufweist, einen bestimmten Wert nur dann, wenn $n < 1$; es ist dagegen $+\infty$ sowohl wenn $n > 1$, wie auch für $n = 1$.

Wenn nämlich $a < x' < b$, so ist

$$\int_a^{x'} \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{1}{(n-1)(b-x')^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(b-a)^{n-1}}$$
$$(n \lesseqgtr 1),$$

daher existirt $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ nur dann, wenn $\lim\limits_{x=b-0} \frac{1}{(b-x')^{n-1}}$ vorhanden ist, und das trifft nur zu, wenn $n < 1$, indem dann $\lim\limits_{x'=b-0} \frac{1}{(b-x')^{n-1}} = 0$. Ist hingegen $n > 1$, so ist $\lim\limits_{x'=b-0} \frac{1}{(b-x')^{n-1}} = +\infty$. Daher

$$\text{(8)} \qquad \text{für } n < 1 \qquad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}},$$

dagegen

$$\text{für } n > 1 \qquad \lim_{x'=b-0} \int_a^{x'} \frac{dx}{(b-x)^n} = +\infty.$$

Wenn $n = 1$, so hat man

$$\int_a^{x'} \frac{dx}{b-x} = l.(b-a) - l.(b-x'),$$

da aber $\lim\limits_{x'=b-0} l.(b-x') = -\infty$, so ist auch

$$\text{für } n = 1 \qquad \lim_{x'=b-0} \int_a^{x'} \frac{dx}{b-x} = +\infty.$$

260. Wo weder die Zurückführung auf ein eigentliches Integral, noch die unbestimmte Integration gelingt, muss nach andern Mitteln gesucht werden, um zu entscheiden, ob ein Integral, das auf eine unendlich werdende Function sich bezieht, einen bestimmten Wert hat oder nicht. In vielen Fällen kann von dem folgenden Satze Gebrauch gemacht werden:

Wenn die Function $f(x)$, welche endlich ist in jedem Theilintervalle (a, x') von (a, b), wenigstens von einem Werte x_0 zwischen a und b angefangen beständig positiv (negativ) bleibt und für $\lim x = b - 0$ $+\infty$ $(-\infty)$ *wird, so hat das über (a, b) erstreckte Integral $f(x)$ nur dann einen bestimmten Wert,*

wenn die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(x)$ in Bezug auf $\frac{1}{b-x}$ kleiner ist als 1; ist sie grösser oder gleich 1, so ist das Integral $+\infty$ $(-\infty)$.

Bezeichnet man die (positive) Ordnungszahl des Unendlichwerdens mit n, so hat

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{b-x}\right)^n} = (b-x)^n f(x) \quad \text{für} \quad \lim x = b - 0$$

einen bestimmten von Null verschiedenen Grenzwert (16); derselbe sei positiv und A eine positive Zahl, welche kleiner ist als dieser Grenzwert; dann wird es nothwendig eine Stelle x' zwischen x_0 und b geben, von der an beständig

$$(b-x)^n f(x) > A,$$

daher

$$f(x) > \frac{A}{(b-x)^n};$$

daraus folgt, dass auch

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx > A \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(b-x)^n} \qquad (x_0 < x' < x'' < b).$$

Wenn nun $n > 1$ oder $= 1$, so hat zufolge 259, 2) das Integral $\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(b-x)^n}$ für $\lim x'' = b - 0$ den Grenzwert $+\infty$; demnach ist auch

$$\lim_{x''=b-0} \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = +\infty$$

und daher

$$\lim_{x''=b-0} \int_{a}^{x''} f(x)\,dx = \int_{a}^{x'} f(x)\,dx + \lim_{x''=b-0} \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = +\infty.$$

Versteht man andererseits unter B eine Zahl, welche grösser ist als der Grenzwert von $(b-x)^n f(x)$, so wird es eine Stelle x' zwischen x_0 und b geben, von welcher angefangen

$$0 < (b-x)^n f(x) < B,$$

also

$$0 < f(x) < \frac{B}{(b-x)^n};$$

daraus ergibt sich, dass

$$0 < \int_{x'}^{x''} f(x)dx < B\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(b-x)^n}.$$

Wenn nun $n < 1$, so hat $\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(b-x)^n}$ für $\lim x'' = b - 0$ den endlichen Grenzwert $\frac{1}{(1-n)(b-x')^{n-1}}$, dem es sich wachsend nähert, und da das Integral $\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx$, das unter den gemachten Voraussetzungen auch fortdauernd wächst, unter diesem Grenzwerte verbleibt, so hat es für $\lim x'' = b - 0$ ebenfalls einen bestimmten Wert; somit gilt dies auch von

$$\int_a^b f(x)dx) = \int_a^{x'} f(x)dx + \lim_{x''=b-0} \int_{x'}^{x''} f(x)dx.$$

Für den Fall $\lim\limits_{x=b-0} f(x) = -\infty$ erleidet die Beweisführung nur eine unwesentliche Abänderung.

Beispiele. 1) Ist $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ ein irreductibler Bruch, so hat das Integral

$$\int_a^b \frac{F(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

nur dann einen bestimmten Wert, wenn das Intervall (a, b) mit Einschluss seiner Grenzen keine reelle Wurzel von $\varphi(x)$ enthält; im andern Falle ist es unendlich.

Denn unter der gedachten Voraussetzung ist $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ innerhalb (a, b) und an den Grenzen endlich. Hat dagegen $\varphi(x)$ zwischen a und b die reelle Wurzel c, so enthält es den Factor $x - c$ und wird $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ an der Stelle $x = c$ unendlich

von der ersten oder einer höheren Ordnung in Bezug auf $\frac{1}{x-c}$, jenachdem c eine ein- oder mehrfache Wurzel ist.

Hiernach hat $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$, was für Zahlen auch a, b sein mögen, einen bestimmten Wert $(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a)$; dagegen ist $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x^2}$ unendlich, weil das Intervall $(-1, +1)$ die beiden reellen Wurzeln -1, $+1$ des Nenners enthält.

2) Das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} \qquad (\varkappa^2 < 1)$$

hat einen bestimmten Wert, trotzdem die Function

$$[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]^{-\frac{1}{2}}$$

an der oberen Grenze unendlich wird; denn die Ordnung dieses Unendlichwerdens ist $\frac{1}{2}$, weil

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

und somit

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

für $\lim x = 1 - 0$ einen endlichen Grenzwert besitzt.

Man darf nun auf das Integral wie auf ein eigentliches den ersten Mittelwertsatz anwenden und schreiben

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\theta)(1-\varkappa^2\theta^2)}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{(1+\theta)(1-\varkappa^2\theta^2)}}$$

$$(0 < \theta < 1);$$

und da $(1+\theta)(1-\varkappa^2\theta^2)$ gewiss 2 nicht übersteigt und unter $1-\varkappa^2$ nicht herabkommt, so liegt der Wert des obigen Integrals zwischen $\frac{2}{\sqrt{2}}$ und $\frac{2}{\sqrt{1-\varkappa^2}}$.

3) Damit das Integral

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x^n}\, dx,$$

wo $n > 0$, einen bestimmten Wert besitze, trotzdem die Function $\frac{\sin x}{x^n}$ an der unteren Grenze unendlich wird, muss $n < 2$ sein.

Denn es ist

$$\lim_{x=0} \frac{\frac{\sin x}{x^n}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\mu} = \lim \frac{\sin x}{x^{n-\mu}} = 1,$$

wenn $n - \mu = 1$ (16, 2)); dem obigen Satze zufolge erfordert aber die Existenz des Integrals, dass die Ordnungszahl μ des Unendlichwerdens kleiner als 1 sei; folglich muss thatsächlich $n = \mu + 1 < 2$ sein.

Es hat also $\int_0^x \frac{\sin x\, dx}{x}$ und auch $\int_0^x \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}}$, nicht aber $\int_0^x \frac{\sin x\, dx}{x^2}$ einen bestimmten Wert.

4) Das Integral

$$\int_0^x \frac{\cos x}{x^n}\, dx \qquad (n > 0)$$

hat nur dann einen bestimmten Wert, wenn $n < 1$ ist.

Es ist nämlich

$$\lim_{x=0} \frac{\frac{\cos x}{x^n}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\mu} = \lim \frac{\cos x}{x^{n-\mu}} = 1,$$

wenn $n - \mu = 0$; da aber zur Existenz des Integrals $\mu < 1$ erforderlich ist, so muss auch $n = \mu < 1$ sein.

Hiernach hat $\int_0^x \frac{\cos x\, dx}{x}$ keine Bedeutung, wohl aber $\int_0^x \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}}$.

261. Nun gehen wir daran zu erklären, was unter einem Integrale mit *unendlichem Integrationsintervalle* zu verstehen sei.

Die Function $f(x)$ sei in dem Gebiete $(a, +\infty)$ eindeutig definirt, und in jedem Intervalle (a, x'), wobei $x' > a$, habe das Integral

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx = \Phi(x')$$

einen bestimmten Wert. Dann ist $\Phi(x')$ eine stetige Function; convergirt sie bei dem Grenzübergange $\lim x' = +\infty$ gegen eine bestimmte endliche Grenze, so erklärt man diese Grenze als das über $(a, +\infty)$ erstreckte Integral von $f(x)$, bezeichnet letzteres durch $\int_a^\infty f(x)dx$ und hat hiernach den Ansatz

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x'=+\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx. \tag{9}$$

Ist der Grenzwert von $\Phi(x)$ $+\infty$, $-\infty$ oder ist ein solcher nicht vorhanden, so hat das Symbol $\int_0^\infty f(x)\,dx$ keine bestimmte Bedeutung.

Damit $\Phi(x')$ bei dem Grenzübergange $\lim x' = +\infty$ stetig bleibe und einer bestimmten Grenze sich nähere, muss sich ein Intervall $(\varkappa, +\infty)$ bestimmen lassen derart, dass für irgend zwei Werte $x' < x''$ aus demselben der Unterschied der Functionswerte $\Phi(x')$, $\Phi(x'')$ dem Betrage nach kleiner ist als eine im voraus bezeichnete positive Zahl ε; demnach ist die Möglichkeit, zu einem vorgeschriebenen ε ein $\varkappa$ zu bestimmen, so dass

$$|\Phi(x'') - \Phi(x')| = \left|\int_a^{x''} f(x)dx - \int_a^{x'} f(x)dx\right| = \left|\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{10}$$

für $a < \varkappa < x' < x''$, der analytische Ausdruck der Bedingung für die Existenz von $\int_a^\infty f(x)dx$.

Ist es möglich, das genannte Integral durch Transformation der Variabeln in ein Integral mit endlichem Intervalle und endlicher Function umzuwandeln, so entfällt jede weitere Untersuchung.

Kennt man eine Function $F(x)$, welche für alle Werte von x über a den Differentialquotienten $f(x)$ besitzt, mit andern Worten, ist die unbestimmte Integration ausführbar und nähert sich $F(x)$ für $\lim x = +\infty$ einer bestimmten Grenze, die mit $F(\infty)$ bezeichnet werden soll, so hat man

$$\lim_{x'=+\infty} \int_a^{x'} f(x)\,da = \lim_{x'=+\infty} F(x') - F(a) = F(\infty) - F(a),$$

also

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(a); \tag{11}$$

d. h. es besteht dann der Hauptsatz der Integral-Rechnung wie bei endlichem Intervalle.

Die Definition (9) ist auch auf Integrale übertragbar, bei welchen das Integrationsintervall ins negativ Unendliche sich erstreckt oder beiderseits unbegrenzt ist; es gilt nämlich

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{x'=-\infty} \int_{x'}^{b} f(x)\,dx \tag{12}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x'=+\infty} \int_{x'}^{a} f(x)\,dx + \lim_{x''=+\infty} \int_{a}^{x''} f(x)\,dx, \tag{13}$$

sofern die rechts angesetzten Grenzwerte wirklich existiren; in Formel (13) bedeutet a eine beliebige Zahl.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^n} \qquad (a > 0),$$

worin $n > 0$, verwandelt sich durch die Substitution

$$x = \frac{1}{t}$$

in

$$\int_0^{\frac{1}{a}} t^{n-2}\,dt$$

und dies ist ein eigentliches Integral mit dem Werte $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$, wenn $n \gtreqless 2$.

Ist hingegen $n < 2$, so wird die Function $t^{n-2} = \frac{1}{t^{2-n}}$ an der unteren Grenze unendlich; indessen hat das Integral dennoch einen bestimmten und zwar den angegebenen Wert, wenn $2 - n < 1$, also $n > 1$ ist (**259**, 2)).

Demnach ist

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} \qquad \text{für } n > 1, \tag{14}$$

während für $n \leqq 1$ dasselbe Integral $+\infty$ ist.

2) Es ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x=+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x''=+\infty} \operatorname{arctg} x'' - \lim_{x'=-\infty} \operatorname{arctg} x' = \pi,$$

so dass wie bei einem eigentlichen Integrale einer geraden Function (**223**) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ ist.

Allgemein hat man

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \lim_{x=+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2a} \qquad (a > 0). \tag{16}$$

3) Bemerkenswert sind die beiden Formeln

$$\int_a^\infty e^{-x} dx = -\lim_{x=+\infty} e^{-x} + e^{-a} = e^{-a} \tag{17}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = -\lim_{x=+\infty} \frac{e^{-ax}}{a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \qquad (a > 0). \tag{18}$$

4) Auf Grund der Formeln **254**, (29) ist

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \lim_{x=+\infty} \left[\frac{-a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{-ax}\right] + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad (a>0), \tag{19}$$

$$(20)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{x=+\infty}\left[\frac{-a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right] + \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}\qquad (a>0);$$

in beiden Fällen convergirt nämlich der erste Ausdruck gegen die Grenze Null vermöge des Factors e^{-ax}, trotzdem $\sin bx$, $\cos bx$ keiner bestimmten sich nähern, vielmehr unaufhörlich zwischen -1 und $+1$ schwanken.

262. Wenn die unbestimmte Integration nicht ausführbar ist, dann erfordert die Entscheidung der Frage, ob ein Integral mit unendlichem Integrationsintervalle eine Bedeutung hat oder nicht, eine besondere Untersuchung. Man kann dabei häufig von dem folgenden Satze Gebrauch machen:

Wenn die Function $f(x)$, welche für alle Werte $x>a>0$ eindeutig definirt ist, wenigstens von einer über a gelegenen Stelle x_0 angefangen beständig positiv (negativ) bleibt und bei dem Grenzübergange $\lim x = +\infty$ *unendlich klein wird von erster oder niedrigerer als der ersten Ordnung in Bezug auf $\frac{1}{x}$, so ist das über $(a, +\infty)$ erstreckte Integral von $f(x)$ $+\infty(-\infty)$; einen bestimmten Wert hat es unter den gemachten Voraussetzungen nur dann, wenn $f(x)$ unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung wird.*

Bezeichnet man die Ordnungszahl mit n, so hat

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = x^n f(x) \qquad \text{für } \lim x = +\infty$$

einen bestimmten von Null verschiedenen Grenzwert, den wir als positiv voraussetzen.

Sei A eine positive unter diesem Grenzwerte liegende Zahl, so gibt es nothwendig eine Stelle x' über x_0, von der angefangen beständig

$$x^n f(x) > A,$$

also

$$f(x) > \frac{A}{x^n};$$

daraus folgt dann

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx > A\int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x^n} \qquad (a < x_0 < x' < x'');$$

ist nun $n \leqq 1$ *), so ist nach **261**, 1)

$$\lim_{x''=+\infty}\int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x^n} = +\infty,$$

daher auch

$$\lim_{x''=+\infty}\int_{a}^{x''} f(x)\,dx = \int_{a}^{x'} f(x)\,dx + \lim_{x''=+\infty}\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = +\infty.$$

Bedeutet andererseits B eine über dem Grenzwerte von $x^n f(x)$ liegende Zahl, so wird nothwendig von einer über x_0 liegenden Stelle x' an beständig

$$x^n f(x) < B,$$

also

$$f(x) < \frac{B}{x^n}$$

sein; daraus folgt, dass auch

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx < B\int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x^n} \qquad (a < x_0 < x' < x'');$$

ist nun $n > 1$, so convergirt $\int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x^n}$ für $\lim x'' = +\infty$ beständig wachsend gegen $\frac{1}{(n-1)x'^{n-1}}$, daher convergirt nothwendig auch das linksstehende, ebenfalls mit x'' wachsende Integral gegen eine bestimmte Grenze; es gilt dies also auch für

$$\lim_{x''=+\infty}\int_{a}^{x''} f(x)\,dx = \int_{a}^{x'} f(x)\,dx + \lim_{x''=+\infty}\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx.$$

Für ein schliesslich negativ bleibendes $f(x)$ erleidet der Beweis nur eine unwesentliche Abänderung.

---

*) Hierin sind also auch die Fälle $n = 0$ und $n < 0$ inbegriffen; dem ersten entspricht die Convergenz von $f(x)$ gegen eine endliche Grenze, dem zweiten das Unendlichwerden von $f(x)$ bei $\lim x = +\infty$

Beispiele. 1) Es sei $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ ein irreductibler rationaler Bruch und sein Nenner besitze in dem Intervalle $(a, +\infty)$ keine Wurzel. Das Integral

$$\int_a^\infty \frac{F(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

hat dann und nur dann einen bestimmten Wert, wenn der Bruch echt und sein Nenner wenigstens um zwei Einheiten höheren Grades ist als der Zähler; denn nur dann wird die Function $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ an der oberen Grenze unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung.

Ist dagegen der Bruch unecht oder sein Nenner nur um eine Einheit dem Grade nach höher als der Zähler, dann ist das Integral unendlich.

Hiernach hat beispielsweise das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + px + q} \qquad \left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$$

einen bestimmten Wert und zwar ist (**230**, (14))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\left\{\lim_{x=+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right.$$

$$\left. - \lim_{x=-\infty} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right\} = \frac{\pi}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$$

2) Das Integral

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

hat für jedes $n > 0$ einen bestimmten Wert. Solange $0 < n < 1$, wird zwar die Function $x^{n-1}e^{-x}$ an der unteren Grenze unendlich, aber von niedrigerer als der ersten Ordnung (**260**); diese Singularität hört auf, sobald $n \geqq 1$ geworden ist. An der oberen Grenze wird $x^{n-1}e^{-x}$ unendlich klein von höherer Ordnung als irgend ein $\frac{1}{x^\mu}$ $(\mu > 0)$.

Dagegen würde für $n < 0$ die Function an der unteren Grenze unendlich von höherer als der ersten Ordnung.

Ist insbesondere n eine positive ganze Zahl > 1, so ergibt sich aus Formel **248**, (8), wenn man darin $G(x) = x^{n-1}$ und $\varkappa = -1$ setzt,

$$(21)\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = -\lim_{x=+\infty}\{e^{-x}[x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} \\ &+ (n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + (n-1)(n-2)\cdots 1]\} \\ &\qquad + (n-1)(n-2)\cdots 1 = (n-1)!. \end{aligned}\right.$$

3) Auch das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

hat einen bestimmten Wert, weil e^{-x^2} für ein beständig wachsendes x unendlich klein wird von höherer Ordnung als jede positive Potenz von $\frac{1}{x}$. Man kann eine obere Grenze für seinen Wert herstellen, wenn man das Integrationsintervall in die Theile $(0, 1)$ und $(1, +\infty)$ zerlegt; im ersten Theile ist e^{-x^2} beständig $\overline{\gtrless} 1$, folglich

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx < 1;$$

im zweiten Theile ist e^{-x^2} beständig $\overline{\gtrless} xe^{-x^2}$, folglich

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx < \int_1^\infty xe^{-x^2}dx = -\lim_{x=+\infty}\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e},$$

so dass

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx < 1 + \frac{1}{2e}.$$

263. Der im vorigen Artikel aufgestellte Satz enthält die wesentliche Voraussetzung, dass die Function unter dem Integralzeichen von einer Stelle des Intervalles $(a, +\infty)$ angefangen fortab dasselbe Zeichen beibehält. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, hört die Function bei beständig wachsendem x niemals auf ihr Vorzeichen zu ändern, dann verliert der Satz seine Anwendbarkeit, und es muss zu andern Methoden

gegriffen werden. Der angeführte Fall tritt besonders dann ein, wenn unter dem Integralzeichen eine periodische Function erscheint.

Ein häufig verwendbares Hilfsmittel, über derlei Integrale zu urtheilen, besteht darin, dass man das Integrationsintervall durch diejenigen Stellen, an welchen $f(x)$ sein Zeichen wechselt, in Theile zerlegt; die auf diese Theile bezüglichen Integralwerte bilden dann eine unendliche und zwar eine alternirende Reihe (**75**), und es ist die Untersuchung des Integrals auf die Prüfung dieser Reihe auf ihre Convergenz zurückgeführt. Die Convergenz kann *vermöge der Beträge* der Glieder allein stattfinden und heisst dann *absolut*; sie kann aber auch erst *kraft des Zeichenwechsels* vorhanden sein; dann spricht man von *bedingter* Convergenz. Diese Begriffsbestimmung überträgt man denn auch auf Integrale mit unendlichem Integrationsgebiete und unterscheidet zwischen solchen, welche gegen ihren Grenzwert absolut convergiren, d. h. auch dann, wenn man statt $f(x)$ den absoluten Wert $|f(x)|$ in Rechnung zieht, und zwischen solchen, welche ihrem Grenzwerte nur bedingt, d. i. kraft des unaufhörlichen Zeichenwechsels von $f(x)$ zustreben.

Sowie man die Beurtheilung von Integralen mit unendlichem Intervalle mitunter mit Erfolg auf die Convergenz von Reihen stützt, kann auch umgekehrt aus der Existenz solcher Integrale auf die Convergenz gewisser Reihen geschlossen werden.

Beispiele. 1) Der Integralsinus auf dem Gebiete $(0, +\infty)$, d. i.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

gehört zu den eben besprochenen Formen; bezüglich seiner unteren Grenze ist schon früher (**260**, 3)) entschieden worden; es bleibt nur noch die Zulässigkeit der oberen Grenze in Frage.

Theilt man $(0, +\infty)$ in die Intervalle $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ... so bilden die auf diese bezüglichen Integralwerte $a_0, a_1, \ldots$ eine alternirende Reihe mit positivem Anfangsgliede, und wenn diese Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots$$

convergirt, so hat das Integral einen bestimmten Wert gleich dem Grenzwert dieser Reihe. Nun folgt aus

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x\, dx}{x}, \qquad a_{n+1} = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin x\, dx}{x},$$

dass

$$|a_n| > |a_{n+1}|;$$

denn führt man in dem zweiten Integrale die Substitution $x = \pi + t$ aus, so kommt

$$a_{n+1} = -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t\, dt}{\pi + t};$$

jetzt beziehen sich a_n und a_{n+1} auf dasselbe Intervall, es ist aber $\left|\frac{\sin x}{x}\right| > \left|\frac{\sin x}{\pi + x}\right|$ für alle Werte aus $[n\pi, (n+1)\pi]$.

Ferner ist

$$|a_n| < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x} = l.\frac{n+1}{n},$$

es convergirt also a_n mit wachsendem n gegen die Grenze Null.

Durch diese zwei Thatsachen ist die Convergenz der Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ erwiesen (75).

Die Convergenz des Integrals ist aber eine bedingte. Denn

$$|a_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

daher ist

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$
$$> \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right),$$

folglich (72, 1)) ist

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty.$$

Das analog gebaute Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\nu}\, dx \qquad (1 < \nu < 2)$$

hingegen ist absolut convergent. Von seiner Existenz überzeugt man sich auf dieselbe Art wie oben, von der absoluten Convergenz durch die Bemerkung, dass jetzt

$$|a_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\nu}\,dx < \frac{1}{(n\pi)^\nu}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(n\pi)^\nu},$$

daher

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < \frac{2}{\pi^\nu}\left(\frac{1}{1^\nu} + \frac{1}{2^\nu} + \cdots + \frac{1}{n^\nu}\right);$$

folglich hat auch $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^\nu}\,dx$ $(1 < \nu < 2)$ einen bestimmten Wert (72, 4)).

2) Von der Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$$

überzeugt man sich auf ähnliche Weise. Wird nämlich $(0, +\infty)$ in die Theile $(0, \sqrt{\pi})$, $(\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}), \ldots$ zerlegt, so bilden die hierauf bezüglichen Integralwerte eine alternirende Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$, deren Glieder dem Betrage nach beständig abnehmen und schliesslich gegen Null convergiren. Denn es ist

$$a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx, \qquad a_{n+1} = \int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{\sqrt{(n+2)\pi}} \sin(x^2)\,dx;$$

das zweite Integral geht aber durch die Substitution $x^2 = \pi + t^2$ über in

$$a_{n+1} = -\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\,\frac{t}{\sqrt{\pi + t^2}}\,dt$$

und in dieser Form ist unmittelbar zu erkennen, dass $|a_n| > |a_{n+1}|$; ferner ist

$$|a_n| < \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} dx = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

folglich $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = 0$.

Die Convergenz ist hier nur bedingt. Denn nach **256**, (19) ist

$$|a_n| = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} |\sin(x^2)|\, dx = \theta \left\{\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\right\}$$

$$= \frac{\theta\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > \frac{\theta\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n+1}},$$

folglich

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| > \frac{\theta\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right],$$

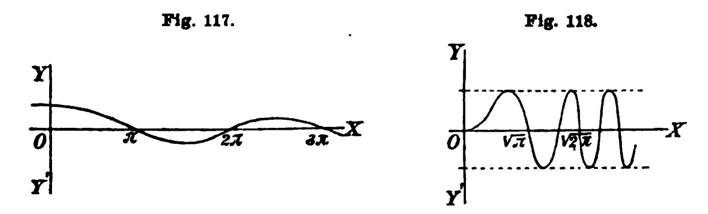
also (72, 3))

$$\int_0^\infty |\sin(x^2)|\, dx = +\infty.$$

Es ist nicht ohne Nutzen, auf das verschiedene Verhalten der beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$$

hinzuweisen. Bei dem ersten erfolgte die Theilung in *gleiche Intervalle* $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ..., aber die Function $\frac{\sin x}{x}$ nimmt von einem Intervalle zum nächsten immer kleinere Werte an: die Curve $y = \frac{\sin x}{x}$ ist eine Wellenlinie von gleich langen Wellen mit abnehmender Amplitude (Fig. 117). Bei dem zweiten Integrale wurden die Theilintervalle $(0, \sqrt{\pi})$, $(\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi})$,..



immer kleiner, in jedem derselben erreicht aber die Function $\sin(x^2)$ denselben grössten Betrag: die Curve $y = \sin(x^2)$ ist eine Wellenlinie mit abnehmender Wellenlänge, aber gleichbleibender Amplitude (Fig. 118).

3) Der Schluss von der Existenz eines Integrals mit unendlichem Integrationsgebiete auf die Convergenz einer unend-

lichen Reihe kann auf Grund des folgenden Satzes gemacht werden: Ist $f(x)$ eine für das Intervall (a, ∞) beständig positive und abnehmende Function, und hat das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

einen bestimmten Wert, so ist die unendliche Reihe

$$f(\alpha) + f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + \cdots$$

convergent; hat dagegen das Integral den Wert $+\infty$, so ist die Reihe divergent; α bedeutet die kleinste ganze Zahl in (a, ∞).

Weil nämlich für alle Werte von x zwischen $\alpha + n$ und $\alpha + n + 1$

$$f(\alpha + n) > f(x) > f(\alpha + n + 1),$$

so ergibt sich durch Integration zwischen $\alpha + n$ und $\alpha + n + 1$

$$f(\alpha + n) > \int_{\alpha+n}^{\alpha+n+1} f(x)\,dx > f(\alpha + n + 1).$$

Daraus folgt aber, dass

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx > f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + f(\alpha + 3) + \cdots$$

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx < f(\alpha) + f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + \cdots.$$

Ist demnach $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ eine endliche Grösse, so ist vermöge der ersten Beziehung die aus positiven Gliedern bestehende Reihe $f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + f(\alpha + 3) + \cdots$, also auch die Reihe $f(\alpha) + f(\alpha + 1) + \cdots$ convergent; die zweite Beziehung zeigt, dass die Reihe $f(\alpha) + f(\alpha + 1) + \cdots$ divergent ist, wenn das Integral einen unendlichen Wert hat.

So hat das Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} \qquad (n > 0)$$

einen bestimmten Wert, wenn $n > 1$, dagegen einen unendlichen Wert, wenn $n \overline{\lessgtr} 1$ (261, 1); infolge dessen ist die Reihe

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

convergent für $n > 1$, divergent für $n \lesseqgtr 1$ (72, 1), 3), 4)).

Das Integral $\int_2^\infty \frac{dx}{x\,l.\,x}$ hat den Wert $+\infty$, weil

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\,l.\,x} = \lim_{x=+\infty} l.\,l.\,x - l.\,l.\,2 = +\infty,$$

daher ist die Reihe

$$\frac{1}{2\,l.\,2} + \frac{1}{3\,l.\,3} + \frac{1}{4\,l.\,4} + \cdots$$

divergent.

§ 3. Integration unendlicher Reihen.

264. Die Aufgabe, eine convergente unendliche Reihe, deren Glieder Functionen von x sind, zu integriren, kann sich in zweifacher Weise darbieten. Entweder ist die zu integrirende Function durch eine solche Reihe definirt, und dann liegt die Aufgabe unmittelbar vor; oder die Function unter dem Integralzeichen gehört zu denjenigen, deren unbestimmte Integration mittels der elementaren Functionen in endlicher Form nicht möglich ist, und dann wird man mittelbar zu jener Aufgabe geführt, wenn man die Function in eine convergente Reihe entwickelt.

Es sei

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots \tag{1}$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder in dem endlichen Intervalle (a, b) mit Einschluss der Grenzen eindeutige, stetige Functionen von x sind und die in dem genannten Intervalle gleichmässig convergirt (80). Dann ist ihr Grenzwert $f(x)$ eine in demselben Intervalle einschliesslich seiner Grenzen stetige Function von x (82) und daher zur Integration über (a, b) geeignet. Es handelt sich nur darum, in welcher Weise die Integration an der definirenden Reihe (1) zu vollziehen ist. Darüber belehrt nun der folgende Satz.

Die durch gliedweise Integration einer in (a, b) gleichmässig convergenten Reihe $f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ entstandene Reihe

$$(2) \qquad \int_a^b f_0(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots$$

ist convergent und

$$\int_a^b f(x)dx$$

ihr Grenzwert, wenn $f(x)$ der Grenzwert der vorgelegten Reihe ist.

Setzt man nämlich

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = s_n(x)$$
$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots\cdots\cdots = r_n(x),$$

so dass

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

so ergibt die Integration (217, 5))

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b s_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx,$$

und weiter ist auf derselben Grundlage

$$\int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b f_0(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx = S_n(x).$$

Dem Begriffe der gleichmässigen Convergenz gemäss lässt sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε eine natürliche Zahl m bestimmen derart, dass für jedes x, wofür $a \leqq x \leqq b$,

$$|r_n(x)| < \varepsilon,$$

so lange $n \geqq m$; daraus folgt, dass

$$\left|\int_a^b r_n(x)dx\right| < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a)$$

und

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n(x)\right| < \varepsilon\,|b-a|$$

für jedes $n \geqq m$. Dass aber der Unterschied zwischen $\int_a^b f(x)dx$ und $S_n(x)$ dadurch, dass man n gross genug wählt, dem absoluten Betrage nach unter jede beliebig klein fest-

gesetzte positive Zahl gebracht werden kann, ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n=+\infty} S_n(x),$$

d. h. wenn man die Bedeutung von $S_n(x)$ ins Auge fasst,

$$(3)\quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_0(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots.$$

Man braucht nur die untere Grenze unbestimmt zu lassen und die obere durch x zu ersetzen — beide Grenzen selbstverständlich auf das Convergenzintervall von (1) angewiesen — um die Formel für unbestimmte Integration zu erhalten.

Eine Potenzreihe ist in jedem Intervalle, das *innerhalb* ihres Convergenzintervalles liegt, gleichmässig convergent (**84**); daraus ergibt sich auf Grund des obigen Satzes die wichtige Folgerung:

Eine Potenzreihe ist in jedem Intervalle, das innerhalb ihres Convergenzintervalles enthalten ist, zur gliedweisen Integration geeignet.

Was die Grenzen des Convergenzintervalles selbst anlangt, so ist Folgendes zu bemerken. Ist X beispielsweise die obere Grenze des Convergenzintervalles, a dagegen innerhalb desselben gelegen und die Reihe

$$\int_a^X f(x)dx + \int_a^X f(x)dx + \cdots$$

convergent, so stellt sie den Wert des Integrals

$$\int_a^X f(x)dx$$

auch dann noch dar, wenn die vorgelegte Reihe an der Grenze X selbst nicht mehr convergent sein sollte (**259**).

Ist demnach insbesondere $(-X, +X)$ das Convergenzintervall der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

und $f(x)$ ihr Grenzwert, so ist

$$\int_0^x f(x)dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots$$

für jedes x, das dem Betrage nach kleiner ist als X, und es gilt auch noch

$$\int_0^X f(x)dx = a_0 X + a_1 \frac{X^2}{2} + a_2 \frac{X^3}{3} + \cdots,$$

wenn die rechts befindliche Reihe convergent ist, auch wenn

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$$

nicht mehr convergent sein sollte.

So ist beispielsweise, so lange $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

(68, 1)); daher für jedes solche x auch

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

aber auch noch

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

weil die rechts befindliche Reihe convergirt, obwohl die ursprüngliche Reihe für $x = 1$ nicht mehr convergent ist.

Ebenso hat man, so lange $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$$

und für jedes so beschaffene x auch

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = l.(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

aber auch noch

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \quad l.(2) \quad = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots,$$

obwohl die der Integration unterworfene Reihe für $x = 1$ nicht mehr convergent ist.

Ein weiteres Beispiel dieser Art bietet der für jedes x, dessen Betrag unter 1 liegt, geltende Ansatz

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots;$$

so lange $|x| < 1$, ist auch

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots;$$

da die rechts befindliche Reihe auch noch für $x = 1$ convergent ist — die ursprüngliche ist es nicht mehr (97) — so ist auch

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5} + \cdots.$$

265. Für eine convergente Potenzreihe mit dem Grenzwerte $f(x)$ ist in Artikel 87 der Satz bewiesen worden, dass sie durch gliedweise Differentiation eine neue convergente Reihe ergibt, deren Grenzwert der Differentialquotient $f'(x)$ von $f(x)$ ist. Dieser Satz kann nun auf convergente Reihen überhaupt ausgedehnt werden und lautet dann folgendermaassen:

Wenn aus der convergenten Reihe $f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ mit dem Grenzwerte $f(x)$ durch gliedweise Differentiation die gleichmässig convergente Reihe $f_0'(x) + f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots$ hervorgeht, so ist der Grenzwert $F(x)$ der letzteren $= f'(x)$.

Sind nämlich a und x zwei Werte, welche den Convergenzintervallen beider Reihen zugleich angehören, so darf auf die zweite Reihe wegen ihrer gleichmässigen Convergenz gliedweise Integration über (a, x) angewandt werden und ergibt

$$\begin{aligned}\int_a^x F(x)dx &= \int_a^x f_0'(x)dx + \int_a^x f_1'(x)dx + \int_a^x f_2'(x)dx + \cdots\\ &= f_0(x) - f_0(a) + f_1(x) - f_1(a) + f_2(x) - f_2(a) + \cdots\\ &= f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots\\ &\qquad - [f_0(a) + f_1(a) + f_2(a) + \cdots]\\ &= f(x) - f(a);\end{aligned}$$

daraus aber folgt durch Differentiation nach der oberen Grenze x, dass

$$F(x) = f'(x).$$

266. Wie schon am Eingange von **264** bemerkt worden ist, bildet *die Integration mittels unendlicher Reihen* ein wichtiges Hilfsmittel solchen Functionen gegenüber, deren unbestimmte Integration durch die elementaren Functionen in endlicher Form nicht möglich ist. Gelingt es, die Function oder einen passend gewählten Factor derselben in eine gleichmässig convergente Reihe, insbesondere also in eine Potenzreihe zu entwickeln, so kann an dieser die Integration vollzogen werden, und das Integral selbst ist durch eine oder mehrere convergente Reihen dargestellt. Voraussetzung ist dabei, dass die Integrale der einzelnen Glieder zu den elementaren Formen gehören.

Beispiele. 1) Enthält das Intervall (a, x) die Null nicht, so hat das Integral

$$\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx$$

einen bestimmten Wert, der sich in Form einer convergenten Reihe darstellen lässt; es ist nämlich für jedes x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

daher

$$\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx = l.\frac{x}{a} + \frac{x-a}{1\cdot 1!} + \frac{x^2-a^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3-a^3}{3\cdot 3!} + \cdots.$$

2) Das Integral

$$\int_0^x \frac{l.(1+x)}{x}\,dx$$

kann für jedes x, dessen $|x| \leqq 1$, durch eine Reihe dargestellt werden. Es ist nämlich, so lange $-1 < x \leqq 1$,

$$l.(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

daher

$$\int_0^x \frac{l.(1+x)}{x}\,dx = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \cdots;$$

daraus folgt ohneweiters

$$\int_0^1 \frac{l.(1+x)}{x}\,dx = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots;$$

dass auch $x = -1$ genommen werden kann, hat seinen Grund darin, dass die aus der Integration hervorgegangene Reihe auch für diesen Wert noch convergent ist, wiewohl die zugrunde gelegte nicht mehr convergirt. Daher ist weiter

$$\int_0^{-1} \frac{l.(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{l.(1-x)}{x}\,dx = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right).$$

3) Man hat für jedes beliebige x

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^x \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right] dx$$

$$= \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \cdots,$$

also beispielsweise

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{1\cdot 1!} - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \cdots.$$

Dagegen gilt nur so lange, als das Intervall (a, x) die Null nicht enthält (260, 4)), die Formel

$$\int_a^x \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_a^x \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \cdots\right] dx$$

$$= l.\frac{x}{a} - \frac{x^2 - a^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4 - a^4}{4\cdot 4!} - \cdots.$$

4) Um den Wert des Integrals

$$\int_0^1 x^{nx}\,dx$$

zu bestimmen, beachte man, dass für jedes positive x

$$x^{nx} = e^{nx\,l.x} = 1 + nx\,l.x + \frac{n^2x^2(l.x)^2}{2!} + \cdots;$$

demnach ist

$$\int_0^1 x^{nx}dx = \int_0^1 dx + n\int_0^1 x\,l.x\,dx + \frac{n^2}{2!}\int_0^1 x^2(l.x)^2dx + \cdots;$$

nun gilt nach **246**, 1)

$$\int x^m (l.\,x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(l.\,x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (l.\,x)^{n-1}\,dx,$$

daraus folgt, wenn m eine positive ganze Zahl und $n = m$ ist,

$$\int_0^1 x^m (l.\,x)^m dx = -\frac{m}{m+1}\int_0^1 x^m (l.\,x)^{m-1} dx$$

$$= \frac{m(m-1)}{(m+1)^2}\int_0^1 x^m (l.\,x)^{m-2}\,dx = \cdots = (-1)^m \frac{m(m-1)\cdots 1}{(m+1)^m}\int_0^1 x^m dx$$

$$= (-1)^m \frac{m!}{(m+1)^{m+1}}.$$

Hiernach ist endgiltig

$$\int_0^1 x^{nx} dx = 1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \cdots,$$

also insbesondere

$$\int_0^1 x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots.$$

5) Es sei der Wert des Integrals

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

zu berechnen.

Solange $|x| \leqq 1$, lässt sich $(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ in eine convergente Reihe entwickeln, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreitet, und zwar ist

$$(1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8 - \cdots,$$

das Integral hiervon

$$x - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9} - \cdots,$$

daher zunächst

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} - \cdots$$

$$- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots\right).$$

In dem zweiten Theile des in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ und $(1, 2)$ zerlegten Integrationsintervalles schreibe man

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}};$$

und nun lässt sich $\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ für alle Werte von x aus dem Intervalle $(1, 2)$ in eine convergente nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln:

$$\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{x^8} - \cdots;$$

Division durch x^2 und gliedweise Integration gibt

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{5x^5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{9\cdot x^9} + \cdots,$$

woraus *)

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} - \cdots$$
$$-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots\right).$$

Demnach ist

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$
$$= 2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} - \cdots - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots\right)\right].$$

---

*) Man hätte dieses zweite Theilintegral auch durch die Substitution

$$x = \frac{1}{z}$$

auf das erste zurückführen können; in der That ist

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}.$$

6) Es ist in **260**, 2) gezeigt worden, dass bei dem Integrale *)

$$(4) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad (0<k^2<1,\ 0\leqq x<1),$$

die Integration bis $x=1$ erstreckt werden könne, trotzdem die Function unter dem Integralzeichen für diesen Wert unendlich wird. Zu dieser Erkenntnis kommt man auch direct durch die Substitution

$$x=\sin\varphi,$$

weil durch dieselbe das Integral (4) für $x=1$ in ein eigentliches sich verwandelt, allgemein in

$$(5) \qquad F(\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wo die obere Grenze φ jenen Bogen aus dem Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ bedeutet, welcher der früheren oberen Grenze x entspricht; für $\varphi=\frac{\pi}{2}$, was dem früheren $x=1$ entspricht, zeigt nämlich diese Form nichts Besonderes mehr. (4) ist die algebraische, (5) die trigonometrische Form des *elliptischen Normalintegrals erster Gattung*, das bei vielen Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik auftritt; k heisst der Modul des Integrals.

Um die Berechnung in der Gestalt (4) durchzuführen, entwickelt man $(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Potenzreihe, was für alle Werte $0\leqq x^2\leqq 1$ zulässig ist, da $k^2<1$ vorausgesetzt wird; man erhält

---

*) Für $k=0$ und $k=1$ gehört das Integral zu den elementaren und ist im ersten Falle

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x,$$

im zweiten Falle

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\,l.\,\frac{1+x}{1-x};$$

im ersten Falle ist die obere Grenze $x=1$ zulässig, im zweiten Falle nicht.

$$(1 - k^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 x^4 + \cdots$$

und daraus weiter

$$(6) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = J_0 + \frac{1}{2} k^2 J_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 J_4 + \cdots,$$

wobei

$$(7) \qquad J_{2p} = \int_0^x \frac{x^{2p}\, dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

die Werte aller dieser Integrale sind durch die Formel **244**, (35) bestimmt, indem

$$(8) \begin{cases} J_{2p} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2p} \arcsin x \\ \quad - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2p} \Big[x^{2p-1} + \dfrac{2p-1}{2p-2} x^{2p-3} \\ + \dfrac{(2p-1)(2p-3)}{(2p-2)(2p-4)} x^{2p-5} + \cdots + \dfrac{(2p-1) \cdots 3}{(2p-2) \cdots 2} x \Big] \end{cases}$$

ist.

Geht man von der trigonometrischen Gestalt (5) aus und entwickelt

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi + \cdots,$$

so kommt

$$(9) \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = J_0 + \frac{1}{2} k^2 J_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 J_4 + \cdots$$

und darin ist

$$(10) \qquad J_{2p} = \int_0^\varphi \sin^{2p} \varphi \, d\varphi,$$

wofür sich aus (8) durch dieselbe Substitution, welche (4) in (5) übergeführt hat, die Formel

$$(11) \begin{cases} J_{2p} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2p} \varphi \\ \quad - \dfrac{\cos \varphi}{2p} \Big[\sin^{2p-1} \varphi + \dfrac{2p-1}{2p-2} \sin^{2p-3} \varphi \\ + \dfrac{(2p-1)(2p-3)}{(2p-2)(2p-4)} \sin^{2p-5} \varphi + \cdots + \dfrac{(2p-1) \cdots 3}{(2p-2) \cdots 2} \sin \varphi \Big] \end{cases}$$

ergibt.

Als vollständiges elliptisches Integral bezeichnet man dasjenige, dessen obere Grenze $x = 1$, beziehungsweise $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist; sein Wert K ist, da

$$\int_0^1 \frac{x^{2p}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdots 2p}\,\frac{\pi}{2},$$

durch die Reihe

$$(12)\qquad \begin{cases} K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\ \quad = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right] \end{cases}$$

dargestellt, welche um so rascher convergirt, je kleiner k ist. (Vgl. die 260, 2) für K gefundenen Grenzen.)

7) Zu ganz ähnlichen Rechnungen gibt das Integral*)

$$(13)\qquad \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \qquad (0 < k^2 < 1,\quad 0 \leqq x < 1)$$

Anlass, dessen obere Grenze aus denselben Gründen wie bei dem vorigen Integral (4) bis $x = 1$ hinausgeschoben werden kann; durch die Substitution

$$x = \sin\varphi$$

verwandelt es sich in

$$(14)\qquad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

und lässt nun unmittelbar erkennen, dass die Grenze $\varphi = \frac{\pi}{2}$

---

*) Auch dieses Integral ist elementar, wenn $k = 0$, nämlich

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

und wenn $k = 1$, nämlich

$$\int_0^x dx = x;$$

in beiden Fällen kann die obere Grenze auch 1 sein.

zulässig ist. (13) ist die algebraische, (14) die trigonometrische Gestalt des *elliptischen Normalintegrals zweiter Gattung.*

Wir beschränken uns auf die letztere Form und entwickeln

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1\cdot1}{2\cdot4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\varphi - \cdots;$$

daraus leitet sich durch Integration, die auch hier, weil eine Potenzreihe nach dem Argumente $\sin\varphi$, also eine gleichmässig convergente Reihe vorliegt, gliedweise vollzogen werden kann, die Reihe

$$(15)\quad E(\varphi) = J_0 - \frac{1}{2}k^2J_2 - \frac{1\cdot1}{2\cdot4}k^4J_4 - \frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}k^6J_6 - \cdots;$$

ab; die einzelnen Integrale sind nach (11) zu entwickeln.

Wieder bezeichnet man als vollständiges Integral dasjenige, dessen obere Grenze $x = 1$, beziehungsweise $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist; sein Wert ist durch die Reihe

$$(16)\quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \cdots\right]$$

gegeben.

§ 4. Differentiation durch Integrale definirter Functionen.

267. Schon bei der Begriffsentwicklung des bestimmten Integrals ergab sich die Thatsache, dass ein bestimmtes Integral, das auf eine in (α, β) endliche Function $f(x)$ sich bezieht, eine Function der oberen, innerhalb (α, β) variabel gedachten Grenze ist, und dass es nach dieser Grenze differentiirt die Function $f(x)$ ergibt, falls dieselbe an der betreffenden Stelle stetig ist (**217**).

In der Darstellung einer Function durch ein Integral mit veränderlicher oberer Grenze liegt eine wesentliche Erweiterung des Functionsbegriffs; so sind durch

$$\int_0^x \frac{dx}{l.x}, \quad (x>0); \qquad \int_0^x \frac{\sin x\, dx}{x}; \qquad \int_a^x \frac{\cos x\, dx}{x}, \quad (ax>0);$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (k^2<1,\ |x|\leqq 1);$$

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx, \quad (k^2<1,\ |x|\leqq 1)$$

neue transcendente Functionen von x definirt — der Integrallogarithmus, Integralsinus, Integralcosinus, das elliptische Integral erster und zweiter Gattung — welche eine andere Darstellung mittelst der elementaren Functionen in geschlossener Form nicht gestatten.

Die Formel für die Differentiation derart definirter Functionen lautet demnach

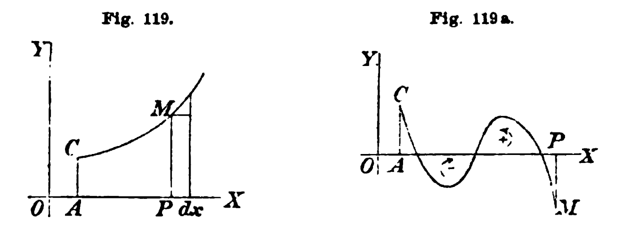
$$D_x \int_a^x f(x)\,dx = f(x). \tag{1}$$

Hiernach ist beispielsweise

$$D_x \int_0^x \frac{dx}{l.\,x} = \frac{1}{l.\,x},$$

und da $\frac{1}{l.\,x}$ für $0 < x < 1$ negativ, für $x > 1$ positiv ist, so ist die durch $\int_0^x \frac{dx}{l.\,x}$ definirte Function von $x = 0$ bis $x = 1$ abnehmend, von $x = 1$ an wachsend, und hat an der Stelle $x = 1$ ihren kleinsten Wert.

Die geometrische Darstellung der Function $\int_a^x f(x)\,dx$ ist, wenn man $y = f(x)$ als Gleichung einer Curve CM, Fig. 119, in rechtwinkligen Coordinaten ansieht, durch die Fläche $APMC$



gegeben*). Bei dieser Auffassung sagt die Gleichung (1), der Differentialquotient der Fläche $APMC$ in Bezug auf die

*) In allgemeinster Fassung bedeutet das Integral die algebraische Summe der von dem Linienzuge $APMC$ umschlossenen Flächen, die im positiven Sinne umfahrenen positiv, die im entgegengesetzten Sinne umfahrenen negativ genommen, Fig. 119 a.

Endabscisse $OP = x$ sei die Endordinate PM, und das *Differential dieser Fläche* das Rechteck aus dieser Ordinate mit dem Differential jener Abscisse. Wird dieses letztere Differential als positiv festgesetzt, so ist das Flächendifferential positiv oder negativ, stellt also eine Zu- oder eine Abnahme der Fläche vor, jenachdem $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$; den Stellen, wo $f(x) = 0$, entsprechen also im Allgemeinen extreme Werte der Function $\int_a^x f(x)dx$.

Auch ein Integral mit variabler unterer Grenze x, wie

$$\int_x^b f(x)dx,$$

definirt eine Function von x, und ihr Differentialquotient ist

$$D_x\int_x^b f(x)dx = D_x\left\{-\int_b^x f(x)dx\right\} = -f(x). \tag{2}$$

Man spricht dies auch dahin aus, der Differentialquotient eines bestimmten Integrals nach seiner unteren Grenze sei der zu dieser Grenze gehörige Wert der Function unter dem Integralzeichen, aber mit entgegengesetztem Zeichen genommen.

Das zugehörige Differential stellt, wenn das Differential von x positiv ist, eine Ab- oder Zunahme der durch das Integral dargestellten Fläche vor, jenachdem $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$.

268. Die Function unter dem Integralzeichen enthalte ausser der Integrationsvariabeln x einen *veränderlichen Parameter* y und sei in dem Intervalle (a, b) integrirbar, welchen Wert aus dem Intervalle (c, d) man dem Parameter y auch ertheilen mag; dann hängt der Wert des Integrals

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

von dem besonderen Werte ab, welchen man dem y ertheilt hat, mit andern Worten, dieses Integral definirt eine Function von y auf dem Gebiete (c, d); bezeichnet man sie durch $\Phi(y)$, so gilt für sie die Definition

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \qquad (c \leq y \leq d). \tag{3}$$

Zunächst lässt sich zeigen, dass $\Phi(y)$ eine stetige Function von y in (c, d) ist, wenn die gleiche Eigenschaft für $f(x, y)$ gilt bei jedem Werte x aus (a, b). Denn diese Stetigkeit von $f(x, y)$ hat zur Folge, dass sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε ein hinreichend kleines positives η bestimmen lässt derart, dass

$$|f(x, y+k) - f(x, y)| < \varepsilon \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

ist, wenn nur y und $y + k$ dem Intervalle (c, d) angehören und $|k| < \eta$ ist. Da nun

$$(4) \quad \begin{cases} \Phi(y+k) - \Phi(y) = \int_a^b f(x, y+k)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx \\ \qquad = \int_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)]\,dx, \end{cases}$$

so ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$|\Phi(y+k) - \Phi(y)| < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a);$$

die linksstehende Grösse kann also bei endlichem (a, b) unter jeden positiven Betrag gebracht werden, daher ist thatsächlich $\Phi(y)$ stetig im Intervalle (c, d).

Die Bedingungen dieses Satzes sind sicher erfüllt, wenn $f(x, y)$, als Function zweier unabhängigen Variabeln aufgefasst (**44**), eine stetige Function ist in dem durch die Relationen

$$a \leqq x \leqq b, \qquad c \leqq y \leqq d$$

bezeichneten Bereiche.

Aus der Gleichung (4) folgt

$$\frac{\Phi(y+k) - \Phi(y)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\,dx;$$

besitzt $f(x, y)$ an jeder Stelle $a \leqq x \leqq b$ einen endlichen ersten und ebenso einen endlichen zweiten Differentialquotienten in Bezug auf y, — der erstgenannte ist dann nothwendig stetig —, so kann die Taylor'sche Formel angewandt und

$$f(x, y+k) = f(x, y) + k f_y'(x, y) + \frac{k^2}{2} f_y''(x, y + \theta k)$$
$$(0 < \theta < 1)$$

gesetzt werden. Dann aber verwandelt sich die obige Formel in

$$(5)\qquad \frac{\Phi(y+k)-\Phi(y)}{k}=\int_a^b f_y'(x,\,y)dx+\frac{k}{2}\int_a^b f_y''(x,y+\theta k)dx.$$

Ist das Intervall $(a,\,b)$ endlich, so haben auch die Integrale der rechten Seite endliche und bestimmte Werte und gibt der Grenzübergang $\lim k = 0$

$$(6)\qquad \Phi'(y)=\int_a^b f_y'(x,\,y)dx.$$

Aber auch bei einem unendlichen $(a,\,b)$ gilt diese Formel, wenn die beiden Integrale $\int_a^b f_y'(x,\,y)dx$ und $\int_a^b f_y''(x,\,y)dx$ bei jedem $c \leqq y \leqq d$ vorhanden sind.

Die Formel (6) spricht den folgenden Satz aus: *Die durch das Integral* $\int_a^b f(x,\,y)dx$ *definirte Function von* y *kann in der Weise differentiirt werden, dass man die Differentiation an der Function unter dem Integralzeichen vollzieht.*

Die Bedingungen, unter welchen dieser Process zur Ausführung gebracht werden darf, den man als *Differentiation unter dem Integralzeichen* bezeichnet, sind im Laufe der Deduction angegeben worden.

Die Grenzen $a,\,b$ galten bisher als unabhängig von y. Es ist nun leicht, auch den allgemeinsten Fall, die Differentiation einer Function $\Psi(y)$ zu erledigen, welche durch das Integral

$$(7)\qquad \int_u^v f(x,\,y)dx$$

definirt ist, dessen Grenzen $u,\,v$ Functionen des Parameters y der Function unter dem Integralzeichen sind. Das Symbol (7) ist dabei als eine zusammengesetzte Function der Variabeln y (54) aufzufassen und demgemäss zu behandeln; man erhält, der Reihe nach die untere, die obere Grenze und das y unter dem Integralzeichen ins Auge fassend und von den Formeln des vorigen Artikels Gebrauch machend,

$$(8)\qquad \Psi'(y) = -f(u, y)\frac{du}{dy} + f(v, y)\frac{dv}{dy} + \int_u^v f_y'(x, y)\,dx.$$

269. Wenn das Integral $\int_a^b f(x, y)\,dx$ ausgewertet, also die durch dasselbe definirte Function $\Phi(y)$ explicit dargestellt ist, so kann die Differentiation nach y in zweifacher Weise, an dem Integrale laut Formel (6) und an der expliciten Darstellung, vollzogen werden; die Gleichsetzung der beiden Resultate liefert eine neue Integralformel.

Auf diesem Wege können aus vorhandenen Integralformeln durch Differentiation neue Formeln abgeleitet werden.

Beispiele. 1) Es ist für jedes $n > -1$

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1};$$

betrachtet man n als veränderlichen Parameter und differentiirt beiderseits m-mal nach demselben, so ergibt sich

$$\int_0^1 x^n\,(l.x)^m\,dx = \frac{(-1)^m \cdot 1 \cdot 2 \cdots m}{(n+1)^{m+1}}.$$

Das Verfahren ist auf der linken Seite anwendbar, weil alle Integrale $\int_0^1 x^n\,(l.x)^m\,dx$, wenn $n > -1$ ist, bestimmte Bedeutung haben, indem dann die Function unter dem Integralzeichen bei $\lim x = +0$ entweder gegen Null convergirt, wenn $n > 0$ (**109**), oder unendlich gross wird von niedrigerer als erster Ordnung, wenn $0 > n > -1$.

2) Es ist für jedes $y > 0$

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y}$$

(**261**, 3)); differentiirt man beiderseits n-mal nacheinander in Bezug auf y, so ergibt sich als Endresultat

$$\int_0^\infty x^n\,e^{-yx}\,dx = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{y^{n+1}};$$

insbesondere folgt daraus für $y = 1$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!.$$

Die Zulässigkeit des Verfahrens folgt aus **262**, 2).

3) Sieht man in der Formel (**255**, (18))

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \qquad (ab > 0)$$

einmal a, ein zweitesmal b als veränderlichen Parameter an und differentiirt darnach, so ergeben sich die neuen Formeln

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3}$$

und durch ihre Summirung die weitere Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Wiederholt man an dieser denselben Vorgang, so kommt man zunächst auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16a^3 b}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16ab^3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right)$$

und durch Summirung weiter auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16ab}\left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4}\right).$$

Das Verfahren kann beliebig oft wiederholt werden.

270. Mit Hilfe der Differentiation unter dem Integralzeichen gelingt es mitunter, ein vorgelegtes Integral zu bestimmen. Handelt es sich beispielsweise um

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

und kann man $\int_a^b f_y'(x, y)\,dx$ auswerten, also $\Phi'(y)$ explicit darstellen, so ist die Bestimmung von $\Phi(y)$ nun auf die Integration von $\Phi'(y)$ zurückgeführt; gelingt diese, so ist damit der Wert des vorgelegten Integrals gefunden.

Wir benützen dieses Verfahren, um einige wichtige Integralformeln zu gewinnen.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

hat für jedes positive y, die Null eingeschlossen, einen bestimmten Wert und stellt eine auf dem ganzen Gebiete $(0, +\infty)$ stetige Function von y dar, die mit $\Phi(y)$ bezeichnet werden möge.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu erkennen, zerlege man nach dem in **263** erläuterten Vorgange das Integrationsgebiet in die Theile $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ..., bezeichne die auf diese Theile bezüglichen Integrale mit $a_0, a_1, \ldots$ und betrachte den Wert des ganzen Integrals als Grenzwert der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots.$$

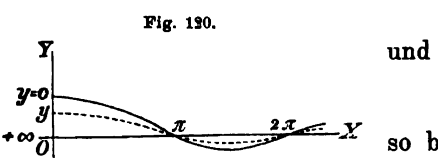
Construirt man die Curven

$$\eta = \frac{\sin x}{x}$$

und

$$\eta = e^{-yx} \frac{\sin x}{x},$$

Fig. 120.



so bilden sie Wellenzüge gleicher Wellenlänge; die Amplitude der Wellen der zweiten Curve nimmt mit dem Wachsen von y immer mehr ab. In Fig. 120 entspricht die voll gezeichnete Wellenlinie der ersten Gleichung, die punktirt ge-

zeichnete einer Curve der zweiten Gleichung: für $y = 0$ fällt die zweite Curve mit der ersten, für $y = +\infty$ aber fällt sie mit der X-Axe zusammen.

Bezeichnet man die zu $y = 0$, also zu dem Integrale $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ gehörige Reihe mit

$$a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots,$$

so ist aus der Figur unmittelbar zu erkennen, dass

$$|a_n| \overline{\gtrless} |a_n^{(0)}| \qquad (0 \overline{\gtrless} y),$$

und da beide Reihen alternirend sind und die zweite convergirt (**263**, 1)), so convergirt auch die erste.

Man kann ferner zwei Werte y, y' immer so nahe aneinander wählen, dass die zugehörigen Partialsummen s_n und s_n' als stetige Functionen von y um weniger als ε dem Betrage nach sich unterscheiden, so dass

$$|s_n' - s_n| < \varepsilon;$$

ferner kann man durch Wahl des n bewirken, dass auch $|r_n| < \varepsilon$ und $|r_n'| < \varepsilon$; denn (**75**) es ist bei hinreichend grossem n $|a_n^{(0)}| < \varepsilon$, daher auch

$$|r_n| < |a_n| \leqq |a_n^{(0)}| < \varepsilon$$

$$|r_n'| < |a_n'| \leqq |a_n^{(0)}| < \varepsilon;$$

infolge dessen ist

$$|(s_n' + r_n') - (s_n + r_n)| < 3\varepsilon$$

und dadurch die Stetigkeit von $\Phi(y)$ erwiesen.

Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist statthaft; denn es ist

$$f(x, y) = e^{-yx} \frac{\sin x}{x},$$

$$f_y'(x, y) = -e^{-yx} \sin x, \qquad f_y''(x, y) = x e^{-yx} \sin x,$$

und die beiden Integrale $\int\limits_0^\infty f_y'(x, y)dx$, $\int\limits_0^\infty f_y''(x, y)dx$ existiren für $y > 0$; ersteres vermöge **261**, 4), letzteres, weil

$$\left|\int_0^\infty x e^{-yx} \sin x\,dx\right| < \int_0^\infty x e^{-yx} dx$$

$$= -\left\{\frac{xe^{-yx}}{y}\right\}_0^\infty + \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y^2}\cdot$$

Nach der eben citirten Formel ist

$$\Phi'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin x\,dx = -\frac{1}{1+y^2},$$

und daraus wieder folgt

$$\int_y^\infty \Phi'(y)dy = \Phi(\infty) - \Phi(y) = -\left\{\operatorname{arctg} y\right\}_y^\infty = \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2},$$

insbesondere

$$\int_0^\infty \Phi'(y)\,dy = \Phi(\infty) - \Phi(0) = -\frac{\pi}{2}\cdot$$

Nun aber ist auf Grund der vorausgeschickten Betrachtung

$$\Phi(\infty) = 0, \qquad \Phi(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

damit ergeben sich die wichtigen Formeln

$$\Phi(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} \tag{9}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot \tag{10}$$

2) Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx$ hat allerdings für jedes y einen bestimmten Wert, aber die Differentiation nach y unter dem Integralzeichen ist auf dasselbe nicht anwendbar; denn setzt man $\frac{\sin yx}{x} = f(x, y)$, so ist

$$f_y'(x, y) = \cos yx, \qquad f_y''(x, y) = -x\sin yx$$

und keines der Integrale $\int_0^\infty f_y'(x, y)\,dx$, $\int_0^\infty f_y''(x, y)\,dx$ hat

einen Sinn. In der That ist die Function $\Phi(y)$, welche durch obiges Integral dargestellt ist, eigenthümlicher Art. Setzt man nämlich $yx = t$, so sind die Grenzen des neuen Integrals 0, $+\infty$ oder 0, $-\infty$, jenachdem y positiv oder negativ ist; folglich hat man

$$\text{für } y > 0 \qquad \Phi(y) = \int_0^{-\infty} \frac{\sin yx}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{für } y < 0 \qquad \Phi(y) = \int_0^{-\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\frac{\pi}{2},$$

während

$$\Phi(0) = 0$$

ist. Es hängt also $\Phi(y)$ nicht von dem Betrage, sondern nur von dem Vorzeichen des y ab und bleibt für alle positiven wie für alle negativen y constant, ist aber an der Stelle $y = 0$, wo es den Wert 0 besitzt, unstetig.

3) Von der Existenz des Integralwertes

$$\Phi(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2yx\, dx$$

überzeugt man sich nach der in **263** entwickelten Methode durch Zerlegung des Integrationsgebietes in die Theile

$$\left(0, \frac{\pi}{4|y|}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4|y|}, \frac{3\pi}{4|y|}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4|y|}, \frac{5\pi}{4|y|}\right), \ldots .$$

Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist statthaft; denn es ist

$$f(x, y) = e^{-x^2} \cos 2yx, \qquad f_y'(x, y) = -2xe^{-x^2} \sin 2yx,$$
$$f_y''(x, y) = -4x^2 e^{-x^2} \cos 2yx,$$

und die beiden Integrale $\int_0^{\infty} f_y'(x, y)\, dx$, $\int_0^{\infty} f_y''(x, y)\, dx$ haben bestimmte Werte, was wieder durch Theilung des Gebietes und Übergang zu Reihen festzustellen ist.

Es ist also

$$\Phi'(y) = -\int_0^{\infty} 2xe^{-x^2} \sin 2yx\, dx$$
$$= \left\{e^{-x^2} \sin 2yx\right\}_0^{\infty} - 2y\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2yx\, dx,$$

d. h.

$$\Phi'(y) = -2y\Phi(y);$$

daraus folgt

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = -2y$$

und

$$\int_0^y \frac{\Phi'(y)\,dy}{\Phi(y)} = l.\,\Phi(y) - l.\,\Phi(0) = -y^2;$$

mithin ist

$$\Phi(y) = \Phi(0)\,e^{-y^2} = e^{-y^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \tag{11}$$

Die Wertbestimmung des obigen Integrals hängt also von einem neuen Integrale ab, das wir sogleich finden werden.

4) Die Existenz und Stetigkeit der Function

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin 2yx}{x}\,dx,$$

ebenso die Statthaftigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen ist nach der Methode des Artikels **263** wieder leicht zu erweisen. Daher ist

$$F'(y) = \int_0^\infty 2e^{-x^2}\cos 2yx\,dx,$$

und nach Formel (11)

$$F'(y) = 2e^{-y^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx;$$

setzt man also

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = J,$$

so ist weiter

$$F'(y) = 2Je^{-y^2}$$

und daraus

$$\int_0^y F'(y)\,dy = F(y) - F(0) = 2J\int_0^y e^{-y^2}\,dy,$$

insbesondere

$$\int_0^\infty F'(y)\,dy = F(\infty) - F(0) = 2J\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = 2J^2.$$

Für $y > 0$ ergibt sich durch die Substitution $2yx = t$

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4y^2}} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

und hieraus erkennt man, dass

$$F(\infty) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2};$$

andererseits ist

$$F(0) = 0.$$

Demnach hat man

$$2J^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad J = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

d. h.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{12}$$

und

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2yx}{x} \, dx = \sqrt{\pi} \int_0^y e^{-y^2} \, dy. \tag{13}$$

Das durch die Formel (12) bestimmte Integral spielt in vielen Gebieten der Anwendung eine grosse Rolle. Durch die Substitution $x = t\sqrt{y}$ verallgemeinert lautet die Formel

$$\int_0^\infty e^{-yt^2} \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}} \qquad (y > 0);$$

differentiirt man beiderseits n-mal in Bezug auf y, so kommt

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-yt^2} \, dt = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{y^{2n+1}}}$$

zustande, und wird $y = 1$, $t = x$ gesetzt, so ergibt sich die Formel

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}. \tag{14}$$

Hingegen ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2} \, dx = -\Big|_0^\infty x^{2n} \frac{e^{-x^2}}{2} + n \int_0^\infty x^{2n-1} e^{-x^2} \, dx$$

$$= n \int_0^\infty x^{2n-1} e^{-x^2} \, dx,$$

und durch n-malige Wiederholung des Vorgangs

$$(15) \qquad \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{n!}{2},$$

wie auch durch die Substitution $x^2 = t$ auf Grund von **262**, (21) hätte gefunden werden können.

§ 5. Integration durch Integrale definirter Functionen. Das Doppelintegral.

271. Es sei $f(x, y)$ eine in dem Gebiete, das durch die Relationen

$$(1) \qquad \begin{cases} a \leqq x \leqq b \\ c \leqq y \leqq d \end{cases}$$

bestimmt ist, stetige Function der Variabeln x, y; dann ist auch

$$(2) \qquad \Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

wie in **268** bewiesen worden, eine stetige Function der Variabeln y in dem Intervalle (c, d) und daher innerhalb desselben integrirbar; ist also $c < y < d$, so existirt das Integral $\int_c^y \Phi(y) dy$, und sein Wert ist durch die Formel

$$(3) \qquad \int_c^y \Phi(y) dy = \int_a^b \left\{ \int_c^y f(x, y)\, dy \right\} dx$$

bestimmt; denn differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf die obere Grenze y, so darf die Differentiation rechts an der Function unter dem Integralzeichen, d. i. an $\int_c^y f(x, y) dy$ vollzogen werden und gibt (**267**) $f(x, y)$; demnach kommt thatsächlich wieder die Gleichung (2) zustande.

Die Formel (3) besagt, dass an einer durch ein Integral von der Form (2) definirten Function von y die Integration zwischen gegebenen Grenzen vollzogen werden kann, indem man sie an der Function unter dem Integralzeichen ausübt; es verbleibt dann wieder nur die Integration in Bezug auf x zwischen den vorgeschriebenen Grenzen a, b. Man bezeichnet

diesen Vorgang als *Integration unter dem Integralzeichen.* Nach den Darlegungen in **268** erfordert die Zulässigkeit eines solchen Verfahrens auch noch die Existenz des Integrals $\int_a^b f_y'(x, y)dx$ für alle Werte $c \leqq y \leqq d$.

Zur Vereinfachung der Bezeichnung schreibt man für die rechte Seite von (3)

$$\int_a^b dx \int_c^y f(x, y)dy, \tag{4}$$

worunter also zu verstehen ist, dass zuerst $f(x, y)$ in Bezug auf y zwischen den Grenzen c, y, wobei x wie eine constante Grösse behandelt wird, und das Resultat in Bezug auf x zwischen den Grenzen a, b zu integriren sei. Insbesondere ist für $y = d$

$$\int_c^d \Phi(y)dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

und setzt man links für $\Phi(y)$ den Wert aus (2) ein, so kommt

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{5}$$

In dieser Gleichung spricht sich der wichtige Satz aus: *Sind an der im Gebiete* (1) *stetigen Function* $f(x, y)$ *nacheinander die Integrationen in Bezug auf* x *und* y *zwischen den bezüglichen Grenzen* a, b *und* c, d *zu vollführen, so darf ohne Beeinträchtigung des Resultates die Reihenfolge dieser Integrationen auch umgekehrt werden.*

Die Differentialrechnung besitzt einen hierzu analogen Satz (**51**).

Analytische Ausdrücke von dem Baue, wie ihn die beiden Seiten der Gleichung (5) aufweisen, bezeichnet man als *Doppelintegrale.* Ihre Ausrechnung führt auf die Ausführung zweier Integrationen in dem bisherigen Sinne oder zweier *einfachen* Integrationen zurück.

Anders verhielte es sich, wenn die Function $\Phi(y)$, an welcher die Integration zwischen vorgeschriebenen Grenzen c, d vorzunehmen ist, gegeben wäre durch ein Integral

$$\int_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y)dx,$$

in welchem auch die Grenzen von dem Parameter y abhängen; formell wäre das Resultat durch

$$\int_c^d dy \int_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y)\, dx \tag{6}$$

dargestellt; aber an die Ausführung der Integration nach y könnte erst geschritten werden, wenn die Integration nach x vollzogen wäre. Bei dem Doppelintegrale (6) kann also von einer Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen im Sinne des obigen Satzes nicht die Rede sein.

Die Integration unter dem Integralzeichen ist ebenso wie die gleichgeartete Differentiation ein Mittel, um aus vorhandenen Integralformeln neue abzuleiten, mitunter vorgelegte Integrale zu bestimmen.

Beispiele. 1) Für jedes $y > 0$ ist

$$\int_0^\infty e^{-yx}\, dx = \frac{1}{y};$$

sind daher a, b zwei positive Zahlen und integrirt man nach y zwischen denselben, so ergibt sich, wenn man diese Integration links unter dem Integralzeichen, also an der Function e^{-xy} vollzieht, wodurch $\left\{\frac{e^{-xy}}{-x}\right\}_a^b = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ erhalten wird, die neue Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = l.\frac{b}{a} \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

2) Sobald nur $y \lessgtr -1$ ist, gilt die Formel

$$\int_0^1 x^y\, dx = \frac{1}{y+1};$$

durch Integration nach y auf einem Intervalle (a, b), das die negative Einheit nicht einschliesst, erhält man daraus

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y\, dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1},$$

d. i.

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{l.x} = l.\frac{b+1}{a+1}.$$

Übrigens kann aus dieser Formel die des vorigen Beispiels mittels der Substitution $x = e^t$ abgeleitet werden.

3) Für jedes $y > 0$ hat man (**261**, 4))

$$\int_0^\infty e^{-yx} \cos bx\, dx = \frac{y}{y^2 + b^2} \cdot$$

$$\int_0^\infty e^{-yx} \sin bx\, dx = \frac{b}{y^2 + b^2};$$

sind demnach α, β irgend zwei positive Zahlen, so darf man nach y zwischen den Grenzen α, β integriren und erhält, wenn man die Integration links unter dem Integralzeichen vornimmt, — von der Statthaftigkeit des Vorgangs kann man sich leicht überzeugen —

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\, l. \frac{\beta^2 + b^2}{\alpha^2 + a^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx\, dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{b} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{b}$$

$$(\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Lässt man nun $\lim \alpha = +0$ und $\lim \beta = +\infty$ werden, so hat die rechte Seite der ersten Gleichung den Grenzwert $+\infty$, die rechte Seite der zweiten Gleichung aber den Grenzwert $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, jenachdem b eine positive oder eine negative Zahl ist. Hiernach gelten die Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x}\, dx = +\infty$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \begin{cases} \ \ \frac{\pi}{2} & (b > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (b < 0), \end{cases}$$

die letztere ist **270**, 2) auf anderem Wege gefunden worden.

4) Der Wert

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

dessen Existenz schon **262**, 3) erkannt und der in **270**, 4) auch bestimmt wurde, bietet zunächst zur Anwendung des vorliegenden Verfahrens keinen Anhalt, weil die Function unter dem Integralzeichen keinen Parameter enthält. Formt man aber das Integral durch die Substitution $x = yt$ $(y > 0)$ um, so kommt

$$J = \int_0^\infty e^{-y^2t^2} y\,dt$$

und

$$J e^{-y^2} = \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)} y\,dt;$$

jetzt stellt das rechtsstehende Integral die auf der linken Seite explicit ausgedrückte Function von y dar, welche Integration auf dem Intervalle $(0, \infty)$ zulässt, die rechts auch unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf; man findet so

$$J \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)} y\,dy,$$

also

$$J^2 = \int_0^\infty \frac{dt}{-2(1+t^2)} \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)} d(-y^2(1+t^2)),$$

$$J^2 = \int_0^\infty \frac{dt}{-2(1+t^2)} \left\{ e^{-y^2(1+t^2)} \right\}_0^\infty = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

woraus sich, wie an der letztcitirten Stelle, $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ergibt.

272. Entsprechend der summatorischen Bedeutung des bestimmten einfachen Integrals (**214**) hat auch *das bestimmte Doppelintegral* die Bedeutung des Grenzwertes einer gewissen Summe, und zwar einer Doppelsumme, gebildet mit Werten einer Function von zwei Variabeln.

Es sei $f(x, y)$ eine für alle Wertverbindungen x/y, welche den Bedingungen

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ c \leqq y \leqq d \end{array} \right. \tag{7}$$

genügen, eindeutig gegebene stetige Function. In geometrischer Darstellung entspricht dem Gebiete (7), das kurz mit P

bezeichnet werden möge, ein Rechteck $ACBD$ in der xy-Ebene, Fig. 121, dessen Seiten der y- und x-Axe in den Abständen a, b, resp. c, d parallel laufen.

Durch Einschaltung der steigend geordneten Werte

$$x_2, x_4, \ldots x_{2p-2}$$

werde das Intervall (a, b) in die Theile

$$(x_{2k-2}, x_{2k})$$

$(k = 1, 2, \ldots p;\ x_0 = a,\ x_{2p} = b)$, ebenso durch Einschaltung von

$$y_2, y_4, \ldots y_{2q-2}$$

das Intervall (c, d) in die Theile

$$(y_{2l-2}, y_{2l})$$

$(l = 1, 2, \ldots q;\ y_0 = c,\ y_{2q} = d)$

Fig. 121.

zerlegt. Daraus geht eine Zerlegung des Gebietes P beider Variabeln in ein Netz von Rechtecken hervor, deren eines, $\alpha\gamma\beta\delta$, den Intervallen (y_{2k-2}, y_{2k}), (y_{2l-2}, y_{2l}) entsprechen möge.

Sind weiters x_{2k-1}, y_{2l-1} zwei beliebige Werte aus den beiden letztgenannten Intervallen, so entspricht ihrer Verbindung ein Punkt aus dem Rechtecke $\alpha\gamma\beta\delta$, mit Einschluss seines Randes, und weiters ein bestimmter Wert $f(x_{2k-1}, y_{2l-1})$ der Function $f(x, y)$.

Bildet man nun für jedes Theilrechteck $\alpha\gamma\beta\delta$ das Product $(x_{2k} - x_{2k-2})(y_{2l} - y_{2l-2})\, f(x_{2k-1}, y_{2l-1})$ und vereinigt diese Producte zu der über alle Theilrechtecke von P sich erstreckenden Doppelsumme

$$(8)\quad S = \sum_1^q{}^l \sum_1^p{}^k (x_{2k} - x_{2k-2})(y_{2l} - y_{2l-2})\, f(x_{2k-1}, y_{2l-1}),$$

so lässt sich von dieser erweisen, *dass sie unter den über die Function $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen bei beständig wachsenden p und q und bei beständiger Abnahme aller Theile (x_{2k-2}, x_{2k}), (y_{2l-2}, y_{2l}) gegen Null einer bestimmten Grenze sich nähert, und dass diese Grenze zusammenfällt mit den in der Gleichung* (5) *vereinigten Doppelintegralen.*

Der Gedankengang des Beweises ist conform dem in

213 entwickelten und soll nur in kurzen Zügen hier gegeben werden.

Es bezeichne $m_{k,l}$ den kleinsten, $M_{k,l}$ den grössten Wert der Function $f(x, y)$ in dem Theilrechtecke $\alpha\gamma\beta\delta$; m den kleinsten, M den grössten Wert der Function in dem ganzen Gebiete P.

Der besondere Wert der Doppelsumme, welcher durch die Wahl von $m_{k,l}$ für $f(x_{2k-1}, y_{2l-1})$ entsteht, heisse S_1; der aus der Wahl von $M_{k,l}$ entspringende Wert sei S'.

Ersetzte man endlich in S jedes $f(x_{2k-1}, y_{2l-1})$ durch m, so nähme sie den Wert $(b-a)(d-c)m$ an, und den Wert $(b-a)(d-c)M$, wenn man statt $f(x_{2k-1}, y_{2l-1})$ jedesmal M setzte.

Und nun besteht die Ungleichung

$$(9) \quad (b-a)(d-c)m < \mathrm{S}_1 < \mathrm{S} < \mathrm{S}' < (b-a)(d-c)M,$$

derzufolge jedes S schon zwischen zwei feste Grenzen eingeschlossen erscheint.

Wird die Theilung von P dadurch weitergeführt, dass man zu den früher eingeschalteten Werten x_{2k}, y_{2l} neue hinzufügt, so wird die mit S_1 bezeichnete Summe im Allgemeinen wachsen, ohne den Betrag $(b-a)(d-c)M$ jemals überschreiten zu können, andererseits wird die mit S' bezeichnete Summe abnehmen, ohne unter $(b-a)(d-c)m$ herabsinken zu können. Beide Summen nähern sich also einander und convergiren gegen eine gemeinsame Grenze, welche zugleich der Grenzwert der eingeschlossenen Summe S ist, weil ihre Differenz

$$(10) \quad \mathrm{S}' - \mathrm{S}_1 = \sum\sum (x_{2k} - x_{2k-2})(y_{2l} - y_{2l-2})(M_{k,l} - m_{k,l})$$

vermöge der Stetigkeit der Function $f(x, y)$ schliesslich kleiner wird als eine beliebig kleine festgesetzte positive Grösse ε.

Um dies zu zeigen, sei x_k/y_l der Mittelpunkt des Rechtecks $\alpha\gamma\beta\delta$; weil $f(x, y)$ im Bereiche P stetig ist, lässt sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven λ ein hinreichend kleines positives η bestimmen derart, dass

$$|f(x, y) - f(x_k, y_l)| < \lambda,$$

so lange $|x - x_k| < \eta$ und $|y - y_k| < \eta$ (42); ist also die Theilung von P einmal so weit gediehen, dass jedes Theilrechteck nach beiden Richtungen eine Ausdehnung kleiner als 2η besitzt, so ist auch

$$|m_{k,l} - f(x_k, y_l)| < \lambda$$
$$|M_{k,l} - f(x_k, y_l)| < \lambda$$

und somit

$$M_{k,l} - m_{k,l} < 2\lambda,$$

daher

$$S' - S_1 < (b-a)(d-c) \cdot 2\lambda;$$

wählt man also $2\lambda = \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$, so wird in der That

$$S' - S_1 < \varepsilon,$$

sobald nur alle Theile (x_{2k-2}, x_{2k}), (y_{2l-2}, y_{2l}) kleiner geworden sind als 2η.

Dass der gemeinsame Grenzwert der Summen S_1, S, S' unabhängig ist von der Art der Theilung des P, ergibt sich daraus, dass jedes S_1 kleiner ist als das auf dieselbe oder irgend eine andere Theilung gegründete S'; der Beweis hiefür ist ganz analog dem in **213**, 4) gegebenen zu führen.

Die Bestimmung des Grenzwertes von S kann nun auf zwei verschiedene Arten erfolgen. Vollzieht man zuerst den Grenzübergang für die Variable x, so entsteht

$$\sum_1^q{}^l (y_{2l} - y_{2l-2}) \lim \sum_1^p{}^k (x_{2k} - x_{2k-2})\, f(x_{2k-1}, y_{2l-1})$$
$$= \sum_1^q{}^l (y_{2l} - y_{2l-2}) \int_a^b f(x, y_{2l-1})\,dx,$$

und hieraus durch Ausführung des Grenzüberganges für y

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx;$$

dagegen erhält man bei Ausführung der Grenzübergänge in der umgekehrten Reihenfolge

$$\sum_1^p{}^k (x_{2k} - x_{2k-2}) \int_c^d f(x_{2k-1}, y)\,dy$$

und dann

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy;$$

sodass, wie oben behauptet worden ist,

$$(11) \begin{cases} \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy \\ = \lim \sum_1^q {}^l \sum_1^p {}^k (x_{2k} - x_{2k-2})(y_{2l} - y_{2l-2}) f(_{2k-1}, y_{2l-1}), \end{cases}$$

wobei der Grenzübergang für $\lim p = \infty$, $\lim q = \infty$ und derart zu vollziehen ist, dass alle $x_{2k} - x_{2k-2}$ und $y_{2l} - y_{2l-2}$ gegen Null abnehmen und $x_0 = a$, $x_{2p} = b$; $y_0 = c$, $y_{2q} = d$ ist.

Dieser Bedeutung des Doppelintegrals entspricht die Bezeichnung desselben durch

$$(12) \qquad \iint_P f(x, y)\, dx\, dy;$$

$f(x, y)\,dx\,dy$ heisst das *Element des Doppelintegrals*, P sein Gebiet; und weil dieses in geometrischer Darstellung durch eine Fläche, im vorliegenden Falle durch die Fläche eines Rechtecks, vorgestellt ist, so nennt man ein Doppelintegral auch ein *Flächenintegral*, zum Unterschiede davon ein einfaches Integral auch ein *Linienintegral*, weil hier das Integrationsintervall durch eine Linie versinnlicht werden kann.

Wenn die Ausrechnung des Doppelintegrals nach dem ersten Vorgange erfolgt, so geschieht die erste Integration bei festem y in Bezug auf x, geometrisch ausgedrückt, längs einer das Integrationsgebiet durchsetzenden Transversale wie MN, Fig. 121; dieser Integralwert wird dann in Bezug auf y auf dem Intervalle (c, d) integrirt. Nach dem zweiten Vorgange geschieht die erste Integration bei festem x nach y, also nach einer das Integrationsgebiet durchsetzenden Transversale wie QR, worauf die Integration dieses Integralwertes in Bezug auf x in dem Intervalle (a, b) folgt.

273. Es liegt nun nahe, den Begriff des Doppelintegrals dahin zu erweitern, dass man ein *beliebig begrenztes Integrationsgebiet* P, Fig. 122, zu Grunde legt, auf welchem die Function $f(x, y)$ endlich und stetig ist. Die Integration von $f(x, y)$

erstreckt sich dann auf solche Wertverbindungen x/y, welchen Punkte innerhalb und am Rande von P entsprechen; analytisch sind derlei Wertverbindungen dadurch gekennzeichnet, dass sie einer oder mehreren Relationen von der Form

$$\psi(x, y) \leqq 0 \tag{13}$$

genügen; so würde, wenn das Integrationsgebiet ein um O mit dem Radius R beschriebener Kreis wäre, diese Relation

$$x^2 + y^2 - R^2 \leqq 0$$

Fig. 122.

lauten, dagegen durch die drei Relationen

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad x^2 + y^2 - R^2 \leqq 0$$

zu ersetzen sein, wenn nur der *erste* Quadrant dieses Kreises das Integrationsgebiet darstellte.

Am einfachsten gestaltet sich die Darstellung eines solchen Doppelintegrals, wenn die Randcurve C von P durch jede Transversale parallel zu einer der Coordinatenaxen nur zweimal geschnitten wird. Trifft dies bei den Transversalen parallel zu OY zu, so führt man die Integration nach y bei festem x längs der Transversale QR, also zwischen Grenzen durch, welche durch die Ordinaten der Punkte Q, R von C dargestellt und daher Functionen von x sind, die mit $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ bezeichnet werden mögen; die Integration dieses Integralwertes

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

in Bezug auf x geschieht nun auf jener Strecke (a, b), welche durch die parallel zu OY an C geführten Tangenten (oder äussersten Linien) auf der X-Axe ausgeschnitten wird, und liefert den endgiltigen Ausdruck

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \tag{14}$$

für das Doppelintegral

$$\iint_P f(x, y)\,dx\,dy. \tag{15}$$

Schneidet auch jede Transversale parallel zu OX die Randcurve zweimal, wie es in Fig. 122 der Fall ist, so gibt die Integration nach x bei festem y

$$\int_{\chi_0(y)}^{\chi_1(y)} f(x, y)\,dx,$$

wobei $\chi_0(y)$, $\chi_1(y)$ die zu y gehörigen Abscissen von C sind, und die abschliessende Integration nach y liefert

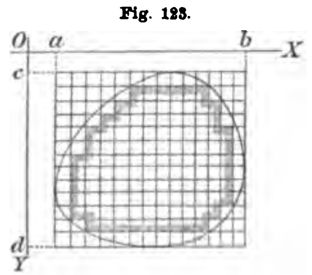
$$\int_c^d dy \int_{\chi_0(y)}^{\chi_1(y)} f(x, y)\,dx, \tag{16}$$

wobei (c, d) das durch die zu OX parallelen Tangenten (oder äussersten Linien) an C begrenzte Intervall von OY bedeutet.

Die Vergleichung der beiden Darstellungsformen (14) und (16) des Doppelintegrals (15) ergibt dann eine Verallgemeinerung des in **271** hervorgehobenen Satzes *von der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen*, wobei aber zu bemerken ist, dass hier nicht auch wie dort die Grenzen der Integration mit vertauscht werden; vielmehr sind die Grenzen der erstmaligen Integration abhängig von der Variabeln, nach welcher zum zweitenmale integrirt wird, und nur die Grenzen der zweiten Integration sind feste Zahlen.

Mit dem obigen ist zugleich die Bedeutung eines Doppelintegrals, wie es am Schlusse von **271** in (6) erwähnt worden ist, näher erläutert.

Fig. 123.



Hat das Integrationsgebiet eine solche Gestalt, dass sein Rand von Transversalen parallel zu den Axen auch in mehr als zwei Punkten getroffen wird, so muss es in Theile zerlegt werden, welche den oben geforderten Bedingungen genügen; für jeden dieser Theile hat die Ausrechnung nach dem Schema (14) oder (16) für sich zu geschehen.

Auch ein Doppelintegral mit krummlinig begrenztem Gebiete kann als Grenzwert einer Doppelsumme von der Zusammensetzung (8) angesehen werden Umschreibt man P ein Rechteck, Fig. 123, zerlegt dieses in ein Netz von Theil-

rechtecken und bildet die Summen S_1, S, S' über *alle* Theilrechtecke, welche vollständig *innerhalb* P' liegen, so beziehen sich diese Doppelsummen nicht auf das ganze Gebiet P, sondern nur auf eine ihm eingeschriebene Figur mit rechtwinklig gebrochenem Umfange; diese Figur aber nähert sich mit immer weiter fortschreitender Theilung dem Gebiete P als Grenze, so dass auch der gemeinsame Grenzwert von S_1, S, S' sich auf das ganze Gebiet P bezieht; dieser Grenzwert, nach dem in **272** entwickelten Vorgange bestimmt, fällt aber genau mit dem Ausdrucke (14) oder (16) zusammen.

274. Eine wichtige *geometrische Bedeutung* kommt dem über ein Gebiet P erstreckten Doppelintegrale einer Function $f(x, y)$ zu, wenn man die Werte derselben als Applicaten einer krummen Fläche auffasst, deren Gleichung also

$$z = f(x, y) \tag{17}$$

ist, und annimmt, dass z im Gebiete P niemals negativ werde.

Das Product $(x_{2k} - x_{2k-2})(y_{2l} - y_{2l-2}) f(x_{2k-1}, y_{2l-1})$ bedeutet dann das Volumen eines Prisma mit der Basis

$$\alpha\gamma\beta\delta = (x_{2k} - x_{2k-2})(y_{2l} - y_{2l-2}) = \varDelta P$$

und der Höhe

$$f(x_{2k-1}, y_{2l-1}) = z_{k,l},$$

welches die von irgend einem Punkte von $\alpha\gamma\beta\delta$, Fig. 121 und 125, ausgehende Applicate von (17) ist. Die Doppelsumme (8) oder

$$\sum\sum z_{k,l} \varDelta P,$$

ist das Volumen eines Körpers, der nach unten durch P, seitlich durch verticale, nach oben durch horizontale Ebenen verschiedener Höhenlage begrenzt ist.

Den Grenzwert dieser Doppelsumme, also das über P ausgedehnte Doppelintegral der Function $f(x, y)$, d. i.

$$\iint\limits_P z\,dx\,dy, \tag{18}$$

erklärt man als das Volumen des über P als Basis ruhenden prismatischen oder cylindrischen Körpers, dessen obere Begrenzung durch die Fläche (17) *gebildet wird.*

Das bestimmte Doppelintegral löst hiernach eine Aufgabe

der Geometrie, welche die elementare Mathematik unerledigt lässt: die Bestimmung des Volumens eines krummflächig begrenzten Körpers.

Ändert die Function $f(x, y)$ innerhalb des Integrationsgebietes P ihr Vorzeichen, indem sie beispielsweise längs der Curve Γ, Fig. 124, durch Null geht, innerhalb derselben positiv, zwischen ihr und dem Rande negativ ist, so bedeutet das Integral (18) die Differenz aus dem über Γ liegenden Volumen und jenem, welches unter dem Ringe zwischen Γ und C sich befindet.

Die Ausrechnung des Integrals (18) durch successive Ausführung zweier Integrationen hat bei der geometrischen Deutung den nachfolgenden Sinn.

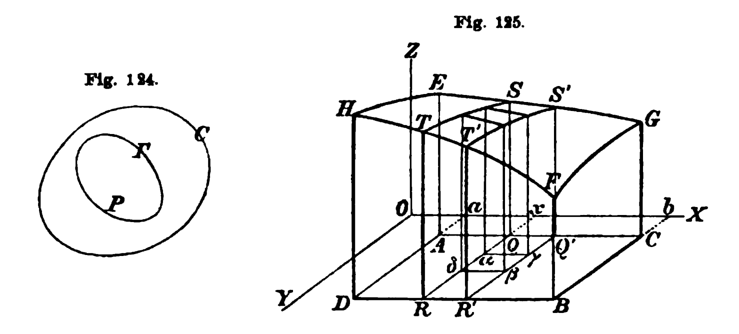


Fig. 124.

Fig. 125.

Integrirt man $f(x, y)$ bei festem x in Bezug auf y zwischen den Grenzen c, d, Fig. 121 und 125, so ist

$$\int_c^d f(x, y)\,dy = \text{area}\; QRTS = u$$

die Fläche eines Querschnittes des Körpers, geführt im Abstande x parallel zur yz-Ebene; weiter gibt

$$dx\int_c^d f(x, y)\,dy = u\,dx$$

das Volumen eines zur x-Axe parallelen Cylinders, welcher jenen Querschnitt zur Basis und die Höhe dx hat; der Grenzwert der Summe dieser Cylinder, d. i.

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_a^b u\,dx, \tag{19}$$

ist wieder das Volumen des ganzen Körpers.

Bei der umgekehrten Reihenfolge der Integrationen ergibt sich dasselbe Volumen als Grenzwert der Summe von Cylindern, welche zur zx-Ebene parallele Querschnitte zu Grundflächen haben und der y-Axe parallel sind.

Diese Betrachtung trifft auch dann zu, wenn das Gebiet P krummlinig begrenzt ist.

Das Element

$$z\,dx\,dy$$

des Doppelintegrals (18) stellt, mit Vernachlässigung von Grössen höherer als der zweiten Ordnung in Bezug auf dx und dy, das Volumen eines prismatischen Säulchens vor, das über dem Elemente $dx\,dy = \alpha\gamma\beta\delta$ ruht und oben durch die krumme Fläche (17) begrenzt ist, mag z von welchem Punkte von $\alpha\gamma\beta\delta$ immer ausgehen.

Das Element

$$u\,dx$$

des einfachen Integrals (19) gibt, mit Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung in Bezug auf dx, das Volumen der Schichte zwischen den um dx von einander entfernten Querschnitten $QRTS$ und $Q'R'T'S'$.

275. Die in **271** entwickelte Auffassung des Doppelintegrals als Grenzwert einer Doppelsumme lässt eine bedeutsame Verallgemeinerung zu. Sie gilt nämlich nicht allein bei der bisher befolgten Theilung des Integrationsgebietes durch Systeme von Parallelen zu den Axen Ox und Oy, sondern bei jeder Theilung in Elemente, deren Ausdehnung bei dem Grenzübergange in jeder Richtung gegen Null abnimmt. Bezeichnet man ein derartiges Element mit dP, so kann das Doppelintegral auch in der Form

$$\iint_P f(x, y)\,dP \tag{20}$$

geschrieben werden.

Diese Bemerkung ist maassgebend für das Verständnis des Vorganges der *Transformation der Variabeln* in einem Doppel-

integrale, welcher für die Ausrechnung solcher Integrale von der grössten Wichtigkeit ist.

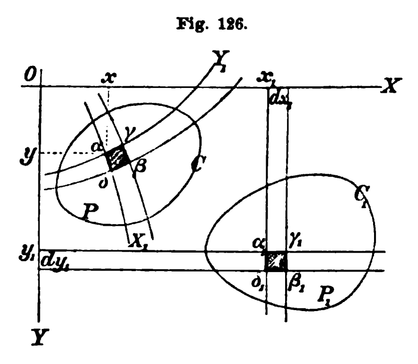
In dem Integrale (20) seien also an die Stelle der Variabeln x, y zwei neue Variable x_1, y_1 durch die ein-eindeutige continuirliche Transformation (68)

$$(21) \qquad \begin{cases} x = \varphi(x_1, y_1) \\ y = \psi(x_1, y_1) \end{cases}$$

einzuführen.

Durch (21) wird jedem Punkte x/y der Coordinatenebene XOY, Fig. 126, ein bestimmter Punkt x_1/y_1 derselben Ebene, einer stetigen Folge von x/y-Punkten eine stetige Folge von x_1/y_1-Punkten, insbesondere dem Gebiete P mit seiner Randcurve C ein Gebiet P_1 mit der Randcurve C_1 zugeordnet. Die Ein-Eindeutigkeit und Stetigkeit der Transformation gibt sich analytisch darin zu erkennen, dass sich aus den Gleichungen

Fig. 126.



$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} dy_1$$
$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1$$

zu gegebenen Werten von dx, dy bestimmte Werte von dx_1, dy_1 ergeben und umgekehrt; dies setzt aber voraus, dass die Determinante

$$(22) \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \end{vmatrix}$$

an keiner Stelle von P_1 verschwinde, dass sie also, ihre Stetigkeit, also auch die Stetigkeit ihrer Elemente vorausgesetzt, im ganzen Gebiete P_1 *dasselbe Zeichen* beibehalte. Man nennt diese Determinante die ***Functionaldeterminante*** von φ, ψ oder auch nach dem Urheber dieser Benennung die Jacobi-

sche Determinante dieser Functionen und bezeichnet sie wohl auch nach einem Vorschlage von Donkin mit

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x_1, y_1)}.$$

Denkt man sich das neue Gebiet P_1 in derselben Weise in rechteckige Elemente $dP_1 = \alpha_1\gamma_1\beta_1\delta_1$ zerlegt wie bisher, so entspricht einem solchen ein Element $dP = \alpha\gamma\beta\delta$ von P, das eine andere Gestalt besitzt und im Allgemeinen von krummen Linien begrenzt ist, für den Grenzübergang aber, d. i. bei sehr klein gedachtem dx_1, dy_1, als ein geradliniges Parallelogramm angesehen werden kann.

Bei dem Übergange von α_1 zu γ_1, wobei y_1 *constant* bleibt, geht der Punkt x/y von α nach γ und seine Coordinaten ändern sich um

$$d_1x = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1$$

$$d_1y = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1;$$

bei dem Übergange von α_1 zu δ_1, wobei x_1 *constant* bleibt, geht x/y von α nach δ und seine Coordinaten ändern sich um

$$d_2x = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}dy_1$$

$$d_2y = \frac{\partial\psi}{\partial y_1}dy_1;$$

demnach ist das Element dP, als das Doppelte des Dreiecks $\alpha\gamma\delta$ gerechnet, gleich dem absoluten Betrage von

$$\begin{vmatrix} d_1x & d_1y \\ d_2x & d_2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1, & \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}dy_1, & \frac{\partial\psi}{\partial y_1}dy_1 \end{vmatrix} = J dx_1 dy_1;$$

setzt man ein für allemal fest, dass die Differentiale der Integrationsvariabeln als *positiv* zu gelten haben, so ist

$$dP = |J|\,dx_1\,dy_1. \tag{23}$$

Hiernach ist

$$\iint\limits_{P} f(x, y)dP = \iint\limits_{P_1} f(\varphi, \psi)\,|J|\,dx_1\,dy_1. \tag{24}$$

Es ist also das vorgelegte Integral der Function $f(x, y)$ gleich dem Integrale der Function $f(\varphi, \psi)|J|$ der neuen Variabeln,

erstreckt über das transformirte Gebiet P_1 *bei Theilung desselben in Elemente* $dx_1 dy_1$.

Die Grenzen der einzelnen Integrationen sind aus der Randcurve C_1 ebenso zu bestimmen, wie dies in **273** für C erklärt worden ist.

Der ganze Vorgang lässt aber noch eine andere Auffassung zu, wenn man x_1, y_1 nicht wieder als neue rechtwinklige Coordinaten, sondern als *Parameter* ansieht, durch welche x, y ausgedrückt werden.

Während y_1 constant bleibt, beschreibt der Punkt x/y eine Curve Y_1, und während x_1 constant bleibt, beschreibt x/y eine Curve X_1; der Punkt $x/y \equiv \alpha$ selbst erscheint als Schnittpunkt dieser Curven, und deshalb nennt man x_1, y_1 *krummlinige* Coordinaten des Punktes α. Mit andern Worten: den früheren Theilungslinien von P_1 entsprechen zwei Systeme krummliniger Theilungslinien von P, und das durch vier solche Linien, je zwei aus jedem Systeme, begrenzte Element von P ist durch $|J|\,dx_1\,dy_1$ gegeben.

Legt man diese Auffassung zu Grunde, so wird die Function $f(\varphi, \psi)$ der neuen Variabeln wieder auf dem Gebiete P integrirt, wobei $|J|\,dx_1\,dy_1$ das Element desselben ist; die Grenzen sind der geometrischen Bedeutung der Parameter x_1, y_1 entsprechend zu bestimmen.

Beide Auffassungen sollen nun an zwei Beispielen erläutert werden, von welchen das zweite eine sehr häufig gebrauchte Transformation betrifft.

1. Beispiel. Jedes Doppelintegral von der Form

$$\iint\limits_P dP \tag{25}$$

stellt, wie aus dem Begriffe unmittelbar hervorgeht, die Grösse des Gebietes P selbst vor.

Nun sei das Gebiet begrenzt durch die Ellipse

$$(a_1 x + b_1 y)^2 + (a_2 x + b_2 y)^2 = k^2. \tag{26}$$

Um seine Grösse zu bestimmen, führen wir in (25) die projective Transformation

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= x_1 \\ a_2 x + b_2 y &= y_1 \end{aligned}$$

durch, welche, nach x, y aufgelöst, gibt

$$x = \frac{b_2 x_1 - b_1 y_1}{D}$$

$$y = \frac{-a_2 x_1 + a_1 y_1}{D},$$

wenn zur Abkürzung

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird. Die Jacobi'sche Determinante dieser Transformation ist

$$J = \begin{vmatrix} \frac{b_2}{D}, & \frac{-b_1}{D} \\ \frac{-a_2}{D}, & \frac{a_1}{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D},$$

also eine Constante; demnach hat man

$$\iint\limits_P dP = \iint\limits_{P_1} \frac{1}{|D|}\, dx_1\, dy_1 = \frac{1}{|D|} \iint\limits_{P_1} dx_1\, dy_1 .$$

Das erübrigende Integral aber stellt die Grösse des transformirten Gebietes dar, dessen Randcurve die Gleichung

$$x_1^2 + y_1^2 = k^2$$

hat, mithin ein Kreis vom Halbmesser k ist; hiernach hat man

$$\iint\limits_{P_1} dx_1\, dy_1 = \pi k^2 .$$

Die Ellipse $(a_1 x + b_1 y)^2 + (a_2 x + b_2 y)^2 = k^2$ hat also den Flächeninhalt

$$\frac{\pi k^2}{|D|}.$$

2. Beispiel. Auf das Integral

$$\iint\limits_P f(x, y) dx\, dy$$

ist die Transformation

$$\left\{\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}\right. \tag{27}$$

auszuüben, wobei r, φ die neuen Variabeln sind. Man bezeichnet diese Transformation in Bezug auf das räumliche

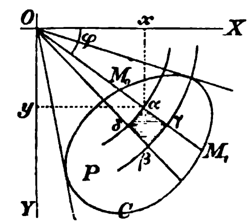
Coordinatensystem als Einführung *semipolarer* oder *cylindrischer Coordinaten*.

Die Jacobi'sche Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

ergibt für das dieser Transformation entsprechende Element des Integrationsgebietes

Fig. 127.



$$(28) \qquad dP = r\,dr\,d\varphi;$$

die R-Curven (Linien mit constantem r) sind Kreise um den Ursprung, die Φ-Curven (Linien mit constantem φ) Strahlen aus dem Ursprunge; dP ist der Ausdruck für einen Kreisringsector, Fig. 127.

Demnach ist

$$(29) \quad \begin{cases} \iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_P f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi \\ \qquad = \int\limits_{\varphi_0}^{\Phi} d\varphi \int\limits_{\varpi_0(\varphi)}^{\varpi_1(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr; \end{cases}$$

$\varpi_0(\varphi)$, $\varpi_1(\varphi)$ sind die zu den Punkten M_0, M_1 gehörigen Werte von r; φ_0, Φ werden durch die aus O an C gezogenen Tangenten bestimmt.

276. Das Doppelintegral einer Function, welche auf dem Integrationsgebiete unendlich wird, definirt man durch den Grenzwert eines Doppelintegrals, das sich auf ein Gebiet bezieht, von welchem die kritischen Stellen durch entsprechend geführte Linien ausgeschlossen sind, wenn dieses letztere Gebiet sich dem vollen auf irgend eine Weise als Grenze nähert; existirt ein solcher Grenzwert nicht, so hat das betreffende Doppelintegral keine Bedeutung.

In ähnlicher Weise wird ein über ein unendliches Gebiet sich erstreckendes Doppelintegral durch den Grenzwert eines über ein endliches Gebiet sich ausdehnenden Integrals definirt, wenn dieses Gebiet beständig sich erweiternd in das unendliche Gebiet übergeht, vorausgesetzt wieder, dass ein solcher Grenzwert wirklich existirt.

Beispiele. 1) Das über das Rechteck OC, Fig. 128, ausgedehnte Integral der Function $f''_{xy}(x, y)$ ergibt sich leicht in folgender Weise; es ist

$$\iint\limits_{(OC)} f''_{xy}(x, y)\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^b f''_{x,y}(x, y)\,dy$$

$$= \int_0^a [f'_x(x, b) - f'_x(x, 0)]\,dx$$

$$= f(a, b) - f(a, 0) - f(0, b) + f(0, 0);$$

Fig. 128.

in gleicher Weise ist also

$$\iint\limits_{(O\Gamma)} f''_{xy}(x, y)\,dx\,dy = f(\alpha, \beta) - f(\alpha, 0) - f(0, \beta) + f(0, 0);$$

das über das hexagonale Gebiet P erstreckte Integral ist der Unterschied beider

$$\iint\limits_{P} f''_{x,y}(x, y) = f(a, b) - f(a, 0) - f(0, b) - f(\alpha, \beta)$$
$$+ f(\alpha, 0) + f(0, \beta).$$

Von dieser letzteren Formel wäre in dem Falle Gebrauch zu machen, wenn $f''_{xy}(x, y)$ bei Annäherung an die Stelle $0/0$ unendlich würde, ohne sonst Unstetigkeit zu zeigen; nur wenn der rechtsstehende Ausdruck für beliebige Grenzübergänge $\lim \alpha = +0$, $\lim \beta = +0$ einer bestimmten Grenze sich nähert, hat das Integral über (OC) unter den bemerkten Umständen einen bestimmten Wert.

Ein solcher Fall entsteht, wenn

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

weil dann

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

für $\lim x = 0$, $\lim y = 0$ $(y \lesseqgtr 0)$ unendlich wird; hier ist nun $f(a, 0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, $f(0, b) = \frac{\pi}{2}$, ebenso $f(\alpha, 0) = 0$ und $f(0, \beta) = \frac{\pi}{2}$, folglich

$$\iint\limits_{P} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha};$$

weil nun $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ bei beliebiger Annäherung von α und β an Null keiner bestimmten Grenze zustrebt, so ist

$$\iint\limits_{(OC)} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy$$

bedeutungslos.

2) Um das Integral

$$\iint e^{-(ax+by)^2}\, dx\, dy \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

auf dem durch die Relationen

$$x \overline{\gtrless} 0, \quad y \overline{\gtrless} 0$$

gekennzeichneten Gebiete, also über dem ersten Quadranten der xy-Ebene zu bestimmen, führe man die Substitution

$$ax + by = u$$
$$y = xv$$

aus; vermöge derselben erscheint der Punkt x/y definirt als Schnittpunkt einer Geraden vom Richtungscoefficienten $-\frac{a}{b}$ und dem Abstande $\frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ vom Ursprunge mit einem Strahle aus O vom Richtungscoefficienten v, Fig. 129. Für die ursprünglichen Variabeln ergeben sich die Ausdrücke

$$x = \frac{u}{a + bv}$$
$$y = \frac{uv}{a + bv}$$

und daraus die Functionaldeterminante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+bv}, & \frac{v}{a+bv} \\ \frac{-bu}{(a+bv)^2}, & \frac{u}{a+bv} - \frac{buv}{(a+bv)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(a+bv)^2}.$$

Hiermit erhält man

$$\int\limits_0^\infty \frac{dv}{(a + bv)^2} \int\limits_0^u e^{-u^2} u\, du$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-u^2}) \int\limits_0^\infty \frac{dv}{(a + bv)^2} = \frac{1}{2ab}(1 - e^{-u^2})$$

als Wert des vorgelegten Integrals, zunächst ausgedehnt über ein Dreieck OAB, Fig. 129, mit den Katheten $\frac{u}{a}$, $\frac{u}{b}$. Um seinen Wert für den ganzen Quadranten XOY zu gewinnen, hat man den Grenzübergang $\lim u = +\infty$ auszuführen und findet so

Fig. 129.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(ax+by)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2ab}.$$

2) Soll das Integral

$$\iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

über der ganzen xy-Ebene berechnet werden, so bestimme man seinen Wert über einem Kreise um O mit dem Halbmesser R; durch Einführung semipolarer Coordinaten ergibt sich hiefür

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Daraus erhält man mittels des Grenzüberganges $\lim R = +\infty$ das über die unendliche Ebene ausgedehnte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi;$$

weil aber

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right\}^2$$

ist, so schliesst man aus obigem Resultate, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

ist (270, 4) und 271, 4)).

§ 6. Drei- und mehrfache Integrale.

277. Wenn man auf eine Function der Variabeln $f(x, y, z)$ zuerst Integration in Bezug auf z allein zwischen festen oder von x, y abhängigen Grenzen, auf das Resultat Integration

in Bezug auf y zwischen festen oder von x abhängigen Grenzen ausübt und das neue Resultat schliesslich nach x zwischen festen Grenzen integrirt, so heisst das so entstandene Gebilde ein bestimmtes *dreifaches Integral* jener Function. Selbstverständlich kann jede andere Reihenfolge der Variabeln eingehalten werden.

Wichtiger als diese formale Entstehung ist die Bedeutung des Integrals als Grenzwert einer dreifachen Summe.

Ist nämlich die gegebene Function $f(x, y, z)$ für alle Werte der Variabeln, welche die Bedingungen

$$(30) \qquad \begin{cases} a \leqq x \leqq b \\ c \leqq y \leqq d \\ g \leqq z \leqq h \end{cases}$$

erfüllen, also auf einem Gebiete R, das geometrisch durch ein Parallelepiped mit zu den Coordinatenaxen parallelen Kanten dargestellt ist, eindeutig und stetig, so convergirt die mit den arithmetisch geordneten Werten

$$\begin{array}{llllll} a = x_0, (x_1), x_2, (x_3), & x_4, \ldots x_{2p-2}, & (x_{2p-1}), & x_{2p} = b \\ c = y_0, (y_1), y_2, (y_3), & y_4, \ldots y_{2q-2}, & (y_{2q-1}), & y_{2q} = d \\ g = z_0, (z_1), z_2, (z_3), & z_4, \ldots z_{2r-2}, & (z_{2r-1}), & z_{2r} = h \end{array}$$

gebildete dreifache Summe

$$(31) \quad \sum_1^r {}^l \sum_1^q {}^k \sum_1^p {}^j (x_{2j} - x_{2j-2})(y_{2k} - y_{2k-2})(z_{2l} - z_{2l-2}) f(x_{2j-1}, y_{2k-1}, z_{2l-1})$$

bei beständigem Wachsen der Zahlen p, q, r und beständiger Abnahme aller Differenzen

$$x_{2j} - x_{2j-2}, \qquad y_{2k} - y_{2k-2}, \qquad z_{2l} - z_{2l-2}$$

gegen Null nach einer bestimmten Grenze, und diese Grenze wird erhalten, wenn man auf die Function $f(x, y, z)$ drei successive Integrationen in dem eingangs erwähnten Sinne ausübt, z. B. die erste nach z zwischen den Grenzen g, h; die zweite nach y zwischen c, d; die dritte nach x zwischen a, b; oder in einer der noch möglichen fünf Reihenfolgen.

Der Beweis hiefür ergibt sich durch eine Schlussreihe, welche der in **272** entwickelten völlig analog ist.

Man bezeichnet den Grenzwert von (31) durch

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{32}$$

und hat hiefür nach Trennung der einzelnen Integrationen, wenn sie in der oben erwähnten Reihenfolge ausgeführt werden, den Ausdruck

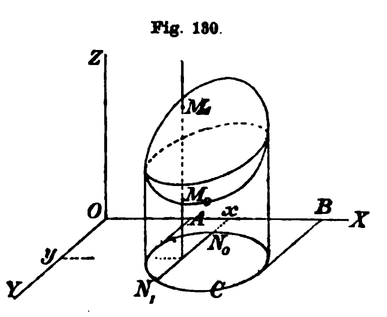
$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_g^h f(x, y, z)\, dz. \tag{33}$$

Diese Definition kann auch auf einen Raum R ausgedehnt werden, der beliebig begrenzt ist; wird die Begrenzung beispielsweise durch eine in sich geschlossene Fläche gebildet, deren Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{34}$$

ist, so kann die Auflösung in einfache Integrationen ohneweiters geschehen, wenn diese Fläche von Parallelen zu einer der Coordinatenaxen nur zweimal getroffen wird. Gilt dies für die Parallelen zur z-Axe, so hat die erste bei festen Werten von x, y erfolgende Integration zwischen jenen Grenzen zu geschehen, welche durch die Applicaten der zu x/y gehörigen Punkte M_0, M_1, Fig. 130, von (34) bezeichnet sind; bezeichnet man diese Auflösungen von (34) nach z in steigender Ordnung mit $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, so gibt die erste Integration

Fig. 130.



$$\int_{\varphi_0(x,y)}^{\varphi_1(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Die nun erübrigende zweifache Integration hat zum Gebiete jenen Theil der xy-Ebene, welcher durch den sichtbaren Umriss von (34) in dieser Ebene begrenzt und analytisch durch Elimination von z zwischen (34) und

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

bestimmt wird (181, 6)).

Demnach ist das Endergebnis bei Einhaltung obiger Reihenfolge

$$(35) \qquad \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_0(x)}^{\psi_1(x)} dy \int\limits_{\varphi_0(x,y)}^{\varphi_1(x,y)} f(x, y, z)\,dz;$$

dabei sind $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ die zur Abscisse x gehörigen Ordinaten der Umrisscurve C.

In geometrischer Ausdrucksweise geschieht die erste Integration längs $M_0 M_1$, die zweite längs $N_0 N_1$, die dritte längs AB.

Während das Gebiet eines dreifachen Integrals der geometrischen Darstellung noch fähig ist, lässt das Integral selbst eine solche nicht mehr zu. Weil das Gebiet ein Theil des Raumes oder auch der unendliche Raum selbst ist, so nennt man ein dreifaches Integral auch *Raumintegral.*

Die nächstliegende Veranschaulichung eines solchen besteht in folgendem. Denkt man sich den Raum R, über welchen das Integral sich erstreckt, mit ungleichförmiger *Masse* erfüllt, deren *Dichte**) am Punkte $x/y/z$ gleich $f(x, y, z)$ ist, so drückt das Integral die Grösse der den Raum R einnehmenden Masse aus.

278. An die Stelle der Theilung des Raumes R in Parallelepipeda mit zu den Axen parallelen Kanten kann jede andere gesetzt werden, wenn nur bei fortgesetzter Theilung alle Ausdehnungen eines jeden Elementes dR gegen Null convergiren. Wir drücken dies dadurch aus, dass wir für (32) das allgemeine Zeichen

$$(36) \qquad \iiint\limits_R f(x, y, z)\,dR$$

setzen.

Auf dieses Integral soll nun die ein-eindeutige continuirliche *Transformation der Variabeln*

$$(37) \qquad \begin{cases} x = \varphi\,(x_1, y_1, z_1) \\ y = \psi\,(x_1, y_1, z_1) \\ z = \chi\,(x_1, y_1, z_1) \end{cases}$$

*) D. i. der Grenzwert des Verhältnisses eines den Punkt nicht ausschliessenden Theiles der Masse zu seinem Volumen, wenn sich dieses letztere, allseitig sich zusammenziehend, der Null nähert.

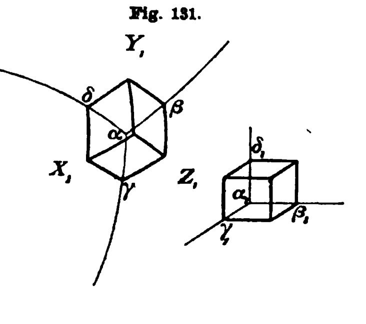
ausgeübt werden. Wie in **275** überzeugt man sich, dass die Eindeutigkeit und Stetigkeit erfordert, dass die Functional- oder Jacobi'sche Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial y_1} & \frac{\partial \chi}{\partial z_1} \end{vmatrix}$$

der Functionen φ, ψ, χ an keiner Stelle des transformirten Gebietes R_1 verschwinde, also durchwegs ein und dasselbe Vorzeichen beibehalte.

Für das neue Gebiet R_1 soll die Theilung in parallelepipedische Elemente $dR_1 = \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, Fig. 131, aufrecht erhalten bleiben. Einem solchen entspricht in dem ursprünglichen Raume R ein Element $dR = \alpha\beta\gamma\delta$ von anderer Form, das im Allgemeinen von krummen Flächen begrenzt ist, für den Grenzübergang aber, d. h. bei sehr kleinem dx_1, dy_1, dz_1, als ebenflächig begrenztes schiefes Parallelepiped aufgefasst und demgemäss berechnet werden kann.

Fig. 131.



Bei dem Übergange von α_1 zu β_1 bleiben y_1, z_1 *constant* und bewegt sich der Punkt x/y von α nach β, wobei seine Coordinaten die Änderungen

$$d_1 x = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1$$

$$d_1 y = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1$$

$$d_1 z = \frac{\partial \chi}{\partial x_1} dx_1$$

erfahren.

Bei dem Übergange von α_1 zu γ_1 ändern sich z_1, x_1 nicht, dagegen die Coordinaten des Punktes $x/y/z$, welcher dabei von α nach γ fortschreitet, um

$$d_2 x = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} dy_1$$

$$d_2 y = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1$$

$$d_2 z = \frac{\partial \chi}{\partial y_1} dy_1 .$$

Bei dem Übergange von α_1 nach δ_1 endlich bleiben x_1, y_1 constant und ändern sich die Coordinaten des Punktes $x/y/z$, der von α nach δ fortschreitet, um

$$d_3 x = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} dz_1$$

$$d_3 y = \frac{\partial \psi}{\partial z_1} dz_1$$

$$d_3 z = \frac{\partial \chi}{\partial z_1} dz_1 .$$

Das Raumelement dR, als das sechsfache des Tetraeders $\alpha\beta\gamma\delta$, kommt hiernach gleich dem absoluten Betrage von

$$\begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y & d_1 z \\ d_2 x & d_2 y & d_2 z \\ d_3 x & d_3 y & d_3 z \end{vmatrix} = J dx_1 \, dy_1 \, dz_1 ;$$

hält man also an der Festsetzung, dass die Differentiale der Variabeln positiv sind, so gilt die Formel

$$(38) \qquad dR = |J| \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 ,$$

und weiter

$$(39) \quad \iiint\limits_R f(x, y, z) dR = \iiint f(\varphi, \psi, \chi) \, |J| \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 .$$

Die Grenzen der einzelnen Integrationen sind aus der Begrenzung von R_1 nach dem im vorigen Artikel erklärten Vorgange abzuleiten.

Den rechtsseitigen Ausdruck kann man ebensowohl als Integration der Function $f(\varphi, \psi, \chi) |J|$ über den Raum R_1 mit dem Elemente $dx_1 \, dy_1 \, dz_1$, wie auch als Integration der Function $f(\varphi, \psi, \chi)$ über den Raum R mit dem Elemente $|J| \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1$ auffassen; im letzteren Falle gelten x_1, y_1, z_1 als Parameter und entsprechen den drei Systemen orthogonaler Ebenen, welche den Raum R_1 eingetheilt haben, drei Systeme

von krummen Flächen X_1, Y_1, Z_1, welche R in die neuen Elemente zerlegen.

1. Beispiel. Das Integral

$$\iiint\limits_R dR,$$

ausgedehnt über den Raum des Ellipsoids

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2 = k^2,$$

gibt die Grösse dieses Raumes selbst.

Um sie zu bestimmen, wenden wir die projective Transformation

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= x_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= y_1 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= z_1 \end{aligned}$$

an, vermöge welcher das Ellipsoid in die Kugel

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = k^2$$

verwandelt wird. Setzt man

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

und bezeichnet die Unterdeterminanten zweiten Grades mit α_1, β_1, u. s. w., so ergeben sich für die ursprünglichen Variabeln die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1}{D} \\ y &= \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1}{D} \\ z &= \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1}{D} \end{aligned}$$

und aus diesen die Jacobi'sche Determinante der Transformation

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{D} & \frac{\beta_1}{D} & \frac{\gamma_1}{D} \\ \frac{\alpha_2}{D} & \frac{\beta_2}{D} & \frac{\gamma_2}{D} \\ \frac{\alpha_3}{D} & \frac{\beta_3}{D} & \frac{\gamma_3}{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^3} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}.$$

Mithin ist

$$\iiint\limits_R dR = \frac{1}{|D|}\iiint\limits_{R_1} dx_1\, dy_1\, dz_1\,;$$

das erübrigende Integral aber bedeutet den transformirten Raum selbst, der eine Kugel vom Halbmesser k ist; folglich ist das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{4\pi k^3}{3|D|}.$$

2. Beispiel. Auf das Integral

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

soll die Transformation (67, I)

$$(40)\qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

ausgeübt werden. Man bezeichnet dies als den Übergang von rechtwinkligen Coordinaten zu *räumlichen Polarcoordinaten*.

Aus der Jacobi'schen Determinante

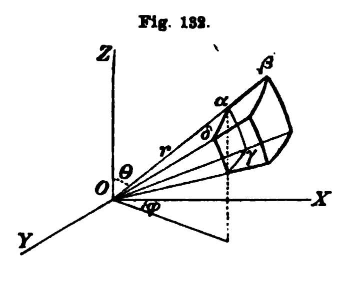
$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi, & r\cos\theta\cos\varphi, & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi, & r\cos\theta\sin\varphi, & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta, & -r\sin\theta, & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

ergibt sich das dieser Transformation entsprechende Raumelement

$$(41)\qquad dR = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,;$$

da die Flächen mit constantem r Kugeln um O, die Flächen mit constantem θ Kreiskegel mit der Spitze O und der Axe OZ, endlich die Flächen mit constantem φ Ebenen durch die Z-Axe sind, so drückt dR (*bis auf Grössen höherer als der dritten Ordnung*) einen von zwei Kugeln, zwei Kegeln und zwei Ebenen begrenzten Körper, Fig. 132, aus.

Fig. 132.



Hiernach ist schliesslich

$$(42)\left\{\begin{aligned} &\iiint\limits_R f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ =&\iiint\limits_R f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \end{aligned}\right.$$

und die Grenzen der Integration müssen jedesmal der Begrenzung von R angepasst werden.

279. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, die Begriffsbildung, aus welcher das doppelte und das dreifache Integral hervorgegangen sind, auf eine Function von mehr als drei, allgemein von n Variabeln auszudehnen.

Ist $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine solche Function und integrirt man sie successive nach den n Variabeln in einer festgesetzten Reihenfolge, wobei die Grenzen einer Integration entweder feste Werte oder aber Functionen derjenigen Variabeln sind, nach welchen noch nicht integrirt worden ist, so entsteht ein *n-faches bestimmtes Integral* jener Function, das bei der Reihenfolge $x_n, x_{n-1}, \dots x_1$ mit Beifügung der Grenzen zu schreiben wäre

$$(43)\qquad \int\limits_{u_1'}^{u_1''} dx_1 \int\limits_{u_2'}^{u_2''} dx_2 \dots \int\limits_{u_n'}^{u_n''} f(x_1, x_2, \dots x_n)\,dx_n\,.$$

Ein solches Integral entsteht aber auch als Grenzwert einer n-fachen Summe von dem Baue

$$(44)\qquad \sum\nolimits_{(n)} f\left(x_1^{(2\varkappa_1-1)}, x_2^{(2\varkappa_2-1)}, \dots x_n^{(2\varkappa_n-1)}\right)\left(x_1^{(2\varkappa_1)} - x_1^{(2\varkappa_1-2)}\right) \times \left(x_1^{(2\varkappa_2)} - x_2^{(2\varkappa_2-2)}\right) \dots \left(x_n^{(2\varkappa_n)} - x_n^{(2\varkappa_n-2)}\right),$$

welche sich auf solche Wertverbindungen der Variabeln bezieht, die einer oder mehreren Bedingungen der Form

$$(45)\qquad F(x_1, x_1, \dots x_n) \leqq 0$$

genügen, für gegen Null abnehmende

$$x_i^{(2\varkappa_i)} - x_i^{(2\varkappa_i-2)} \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Die Ausdrucksweise der früheren Fälle beibehaltend nennt man diesen Grenzwert das über den n-dimensionalen Raum K, der durch (45) gekennzeichnet ist, ausgedehnte n-fache Integral und gebraucht dafür das Symbol

$$(46)\qquad \int\limits_K\nolimits_{(n)} f(x_1, x_2, \dots x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n\,.$$

Auch die Ausführung einer ein-eindeutigen Transformation

$$
(47) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \\ x_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \end{cases}
$$

auf (46) führt zu einem ähnlichen Resultate wie bei zwei und drei Variabeln, indem (46) sich verwandelt in

$$
(48) \qquad \int_{\mathsf{K}}^{(n)} f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) \, |J| \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n,
$$

wobei K jenes Gebiet ist, das aus (45) durch die Substitution (47) hervorgeht, und J die Jacobi'sche Determinante der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ bedeutet, also

$$
(49) \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}.
$$

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Integral-Rechnung.

§ 1. Quadratur ebener Curven.

280. Bei Gelegenheit der Begriffsbestimmung eines einfachen bestimmten Integrals hat sich (**215**) die Thatsache ergeben, dass mit der Ausrechnung des bestimmten Integrals

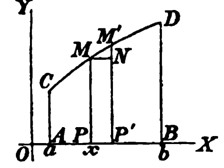
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

einer auf dem Gebiete (a, b) stetigen und zeichenbeständigen Function $f(x)$ die Aufgabe gelöst ist, die von der Curve

$$y = f(x),$$

der Abscissenaxe und den zu den Abscissen $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten begrenzte Figur, Fig. 133, ihrem Flächeninhalte nach zu bestimmen oder zu *quadriren.*

Fig. 133.



Bezeichnet man die Flächenzahl mit S, so bildet die Gleichung

$$(1) \qquad \mathrm{S} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

die *Grundformel* für die *Quadratur ebener Curven.*

Inwieweit von einer Fläche auch dann gesprochen werden kann, wenn die Curve innerhalb (a, b) eine zur Ordinatenaxe parallele Asymptote hat, oder wenn sie ins Unendliche sich erstreckend der Abscissenaxe sich als Asymptote nähert, darüber entscheiden die Untersuchungen der Artikel **259—263.**

Die nächstliegende Verallgemeinerung der Formel (1),

welche aber keine wesentliche Änderung des analytischen Vorganges nach sich zieht, ergibt sich bei Zugrundelegung eines schiefwinkligen Coordinatensystems. An die Stelle des *Flächendifferentials*

$$y\,dx,$$

welches dem Rechtecke $PP'NM$ entspricht, tritt nun, wenn θ der Coordinatenwinkel, das Flächendifferential

$$\sin\theta\, y\, dx$$

als Ausdruck für das entsprechende Parallelogramm, und die Fläche ist

$$\text{(2)} \qquad S = \sin\theta \int_a^b y\, dx.$$

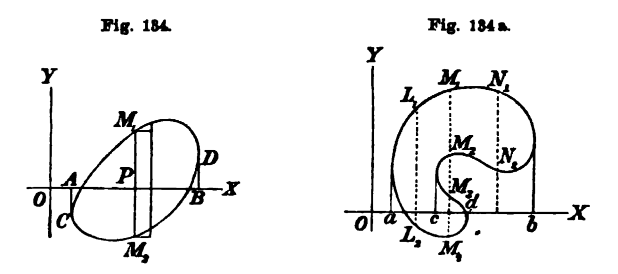
Handelt es sich um eine von einer Curve umschlossene Fläche, Fig. 134, und gehören zu einer Abscisse $OP = x$ innerhalb AB zwei Ordinaten y_1, y_2, von welchen y_1 die algebraisch grössere, so ist ohne Rücksicht auf die Lage der Abscissenaxe

$$(y_1 - y_2)\,dx$$

das Flächendifferential und

$$\text{(3)} \qquad S = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$$

die Fläche selbst.



Wird jedoch die Grenzcurve in gewissen Intervallen von der Ordinatenlinie in mehr als zwei Punkten geschnitten, so ist eine Theilung des Integrationsgebietes nothwendig. So ergäbe sich im Falle der Fig. 134a ohne weitere Erklärung

$$S = \int_a^c (y_1 - y_2)dx + \int_c^d (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\, dx + \int_d^b (y_1 - y_2)dx.$$

Die obigen Formeln sind unmittelbar anwendbar, wenn y als Function von x sich darstellen lässt; sind x, y durch Vermittlung eines Parameters u gegeben:

$$x = x(u),$$
$$y = y(u),$$

dann kommt

(4) $$S = \int_{u_0}^{u_1} y(u)x'(u)du$$

an die Stelle von (1) und sind u_0, u_1 die zu den Punkten C, D, Fig. 133, gehörigen Werte des Parameters; durch diese Formel werden jedoch mitunter auch zusammengesetztere Aufgaben der Quadratur gelöst, als es die Fig. 133 anzeigt.

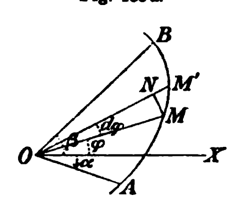
Ist die Curve auf ein anderes als ein Parallelcoordinatensystem bezogen, dann ändert sich der Sinn des Grundproblems und die Zerlegung in Elemente. In dem wichtigsten Falle, der hier zu erwähnen ist, dem des Polarsystems, besteht die Grundaufgabe in der Berechnung des Sectors OAB, Fig. 133a, und das Flächendifferential, entsprechend dem Kreissector OMN, ist ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

mithin die Fläche selbst durch

(5) $$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi;$$

Fig. 133a.



dabei sind α, β die zu A, B gehörigen Amplituden. Auch diese Formel lässt naheliegende Verallgemeinerungen im Sinne von (3) und (4) zu.

Bei besonderen Aufgaben der Quadratur kann auch eine andere dem Falle angepasste Zerlegung in Elemente vortheilhaft sein.

281. *Beispiele.* 1) *Quadratur der allgemeinen Parabel*

$$y = ax^m \quad (a > 0).$$

α) Zunächst sei $m > 0$; dann geht die Curve durch den Ursprung und ihre von da an bis zu einer allgemeinen Ordinate y gezählte Fläche ist

$$S = a\int_0^x x^m\,dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} = \frac{xy}{m+1},$$

steht also zu dem Rechtecke xy aus den Endcoordinaten in einem constanten Verhältnis. So hat man bei der gewöhnlichen Parabel $m = \frac{1}{2}$ oder $m = 2$, jenachdem OX oder OY die Axe ist, und dementsprechend die Fläche $\frac{2}{3}xy$, beziehungsweise $\frac{1}{3}xy$.

β) Ist $m = -\mu < 0$ und $0 < \mu < 1$, so ist (**259**, 2)) Integration von $x = +0$ an zulässig und ergibt

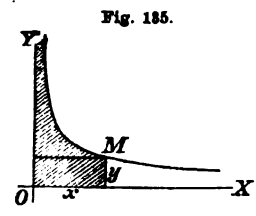


Fig. 135.

$$S = a\int_0^x \frac{dx}{x^\mu} = \frac{a}{(1-\mu)x^{\mu-1}} = \frac{xy}{1-\mu};$$

hiernach besteht zwischen der von der Asymptote OY, der Curve und den Coordinaten von M, Fig. 135, begrenzten Fläche und dem Rechtecke dieser Coordinaten wieder ein constantes Verhältnis, dagegen ist (**261**, 1)) die rechts von y befindliche Fläche

$$S_1 = a\int_x^\infty \frac{dx}{x^\mu} = +\infty.$$

Umgekehrt, wenn $\mu > 1$, ist

$$S = a\int_0^x \frac{dx}{x^\mu} = +\infty$$

und

$$S_1 = a\int_x^\infty \frac{dx}{x^\mu} = \frac{xy}{\mu - 1}.$$

In dem Grenzfalle $\mu = 1$ gilt allgemein

$$S = a\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = a\,l.\frac{x_1}{x_0} \qquad (x_0 x_1 > 0)$$

und wäre sowohl die über $(0, x)$ wie über (x, ∞) ruhende Fläche unendlich. Bemerkenswert ist die Formel, welche sich hier für $a = 1$, $x_0 = 1$ ergibt; sie lautet

$$S = l.x_1$$

und besagt, dass die zwischen der Scheitelordinate der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$ und einer anderen Ordinate eingeschlossene Fläche durch den natürlichen Logarithmus der zur letzteren Ordinate gehörigen Abscisse gegeben ist; daher rührt der Name hyperbolische Logarithmen für natürliche Logarithmen.

2) *Quadratur der Ellipse.* Für den Theil $P_0 P_1 M_1 M_0$, Fig. 136, der Ellipse

Fig. 136.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ergibt sich (**255**, 3))

$$S = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right\}_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{x_1 y_1 - x_0 y_0}{2} + \frac{ab}{2}\left\{\arcsin\frac{x_1}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a}\right\}.$$

Bringt man hiervon das Trapez $P_0 P_1 M_1 M_0$ in Abzug, dessen Flächenzahl $\frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_0 + y_1)$, so erhält man das *Segment* $M_0 M M_1$

$$\text{Segm.} = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{2} + \frac{ab}{2}\left\{\arcsin\frac{x_1}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a}\right\}.$$

Fügt man hierzu wieder das Dreieck OM_1M_0, dessen Flächenzahl $\frac{1}{2}(x_1 y_0 - x_0 y_1)$ ist, so ergibt sich der *Sector* OM_1M_0

$$\text{Sect.} = \frac{ab}{2}\left\{\arcsin\frac{x_1}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a}\right\}.$$

Daraus berechnet sich mit der Substitution $x_0 = 0$, $x_1 = a$ die Fläche des *Ellipsenquadranten*

$$\text{Quadr.} = \frac{\pi a b}{4},$$

sodass die Fläche der *Ellipse* selbst

$$\text{Ell.} = \pi a b$$

ist.

3) *Quadratur der von der Parabel $y^2 = 2px$ und ihrer Evolute begrenzten Fläche.* Nach **154**, 1) lautet die auf dasselbe System bezogene Gleichung der Evolute

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3.$$

Durch Auflösen der Gleichung

$$\frac{8}{27p}(x-p)^3 = 2px$$

ergibt sich die Abscisse der reellen gemeinsamen Punkte beider Curven

$$x = 4p.$$

Demnach ist die gesuchte Fläche

$$S = 2\int_0^p \sqrt{2px}\,dx + 2\int_p^{4p}\left\{\sqrt{2px} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}\right\}dx$$

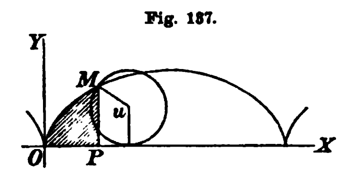
$$= 2\int_0^{4p}\sqrt{2px}\,dx - 2\int_p^{4p}\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2p}}{3}\left\{x^{\frac{3}{2}}\right\}_0^{4p} - \frac{8\sqrt{2}}{15\sqrt{3p}}\left\{(x-p)^{\frac{5}{2}}\right\}_p^{4p} = \frac{88\sqrt{2}}{15}p^2.$$

4) *Quadratur der Cycloide.* Mit Hilfe der Gleichungen

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

Fig. 137.



ergibt sich mit Benützung der Formel (4) für die Fläche OPM, Fig. 137, der Wert

$$S = a^2 \int_0^u (1 - \cos u)^2 du$$

$$= 4a^2 \int_0^u \sin^4 \frac{u}{2}\, du = 8a^2 \int_0^{\frac{u}{2}} \sin^4 v\, dv,$$

d. i. nach einer in **252** abgeleiteten Formel

$$S = a^2 \left(\frac{\sin 2u}{4} - 2 \sin u + \frac{3u}{2}\right).$$

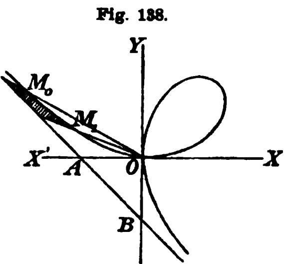
Durch die Substitution $u = 2\pi$ erhält man die Fläche eines Astes der Curve

$$S_0 = 3\pi a^2;$$

dieselbe kommt also gleich der dreifachen Fläche des erzeugenden Kreises.

5) *Quadratur des Cartesischen Blattes.* Bezüglich dieser Curve, die in **126**, 4) und **135**, 4) discutirt worden ist, legen wir uns zwei Fragen vor: nach der Grösse der Schleife, Fig. 138, und darnach, ob der zwischen dem unendlichen Aste und der Asymptote enthaltene Streifen der Ebene eine bestimmte Grösse hat.

Fig. 138.



Die Lösung dieser Fragen mit Hilfe der Gleichung

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0 \quad (a > 0)$$

in rechtwinkligen Coordinaten würde sich umständlich gestalten, weil die Auflösung nach y auf zusammengesetzte Wurzelausdrücke führt.

Mit Hilfe der parametrischen Gleichungen, welche sich mittels der Substitution $y = ux$ ergeben und lauten

$$x = \frac{3au}{1 + u^3}, \qquad y = \frac{3au^2}{1 + u^3},$$

erledigt sich die Frage wie folgt. Der bewegliche Punkt beschreibt die Schleife im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers, während u das Intervall $(0, \infty)$ durchläuft; er muss sie in dem entgegengesetzten Sinne durchlaufen, soll die Formel (4) die Fläche positiv ergeben; daher ist die Fläche der Schleife

$$S_0 = 9a^2 \int_\infty^0 \frac{u^2(1-2u^3)du}{(1+u^3)^3}$$

$$= 9a^2 \left[\int_\infty^0 \frac{u^2 du}{(1+u^3)^2} - 3 \int_\infty^0 \frac{u^5 du}{(1+u^3)^3} \right]$$

$$= 9a^2 \left[\left\{ \frac{1}{3(1+u^3)} \right\}_0^\infty - \int_\infty^1 \frac{(v-1)dv}{v^3} \right]$$

$$= 9a^2 \left[-\frac{1}{3} - \left\{ \frac{1}{v} - \frac{1}{2v^2} \right\}_1^\infty \right] = \frac{3}{2} a^2;$$

die benützte Zerlegung und Substitution sind leicht zu erkennen.

In Polarcoordinaten, O als Pol und OX als Polaraxe genommen, lautet die Gleichung der Curve

$$r = \frac{3a \cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

und die ihrer Asymptote

$$r = \frac{-a}{\cos\varphi + \sin\varphi}.$$

Für die Fläche der Schleife ergibt sich der Ausdruck

$$S_0 = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2} = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg}^3\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2},$$

der wieder den oben gefundenen Wert liefert. Für einen Sector zwischen der Asymptote, wie er in der Figur durch Schraffirung angedeutet ist, erhält man

$$S = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{1}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^2} - \frac{9\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2} \right] d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{d(1+\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^2} - 3 \frac{d(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2} \right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi} - \frac{3}{1+\operatorname{tg}^3\varphi} \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_0} = \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}\varphi - 2}{1+\operatorname{tg}^3\varphi} \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_0};$$

da Zähler und Nenner des Bruches durch $\operatorname{tg}\varphi + 1$ theilbar sind, hat man schliesslich

$$S = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi_0 - 2}{\operatorname{tg}\varphi_0{}^2 - \operatorname{tg}\varphi_0 + 1} - \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - 2}{\operatorname{tg}^2\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_1 + 1}\right].$$

Mit $\varphi_1 = \pi$ und $\lim \varphi_0 = \frac{3\pi}{4} + 0$ ergibt sich hieraus die zwischen dem unendlichen Curvenaste, der Asymptote und ober OX' liegende Fläche gleich $\frac{a^2}{2}$; ebenso gross ist, vermöge der Symmetrie, die zwischen der Asymptote, dem unendlichen Curvenaste und rechts von OY' gelegene Fläche; da endlich auch das Dreieck OBA den Inhalt $\frac{a^2}{2}$ hat, so ist die zwischen der Asymptote und der Curve enthaltene Fläche

$$S_1 = \frac{3a^2}{2}$$

ebenso gross wie die Schleife.

6) *Quadratur der Lemniscate.* Diese algebraische Curve vierter Ordnung, welche auf Grund ihrer Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

in rechtwinkligen Coordinaten in **127**, 2) discutirt worden ist, hat in Polarcoordinaten die Gleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Ein Quadrant derselben hat die Fläche

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{4}\left\{\sin 2\varphi\right\}_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4},$$

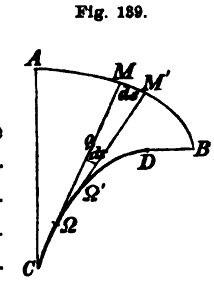


Fig. 139.

folglich die ganze Curve die Fläche a^2; sie gehört also zu den „im engeren Sinne quadrirbaren“ Curven, weil sich aus dem ihr zugrundeliegenden Parameter a durch Construction mit Lineal und Zirkel ein flächengleiches Quadrat herstellen lässt.

7) Die Fläche zwischen einem Curvenbogen AB, den Krümmungsradien AC, BD seiner Endpunkte und dem zugehörigen Bogen CD der Evolute zu bestimmen, Fig. 139.

Das Element dieser Fläche, welches durch die Krümmungsradien zweier sehr nahen Punkte M, M' und durch die Bögen MM', $\Omega\Omega'$ begrenzt ist, kann bis auf Grössen höherer als

der ersten Ordnung als ein gleichschenkliges Dreieck vom Schenkel $M\Omega = \varrho$ und mit dem Contingenzwinkel $d\tau$ an der Spitze gerechnet werden und hat als solches die Fläche

$$\frac{1}{2}\varrho^2 \sin d\tau = \frac{1}{2}\varrho^2\left(d\tau - \frac{d\tau^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right),$$

oder in der bereits festgesetzten Grössenordnung

$$\frac{1}{2}\varrho^2 d\tau = \frac{1}{2}\varrho\, ds,$$

wenn ds das Bogendifferential der gegebenen Curve bedeutet. Hiernach ist die verlangte Fläche

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho\, ds,$$

wenn α, β die den Punkten A, B entsprechenden Werte der Integrationsvariabeln sind.

Auf den Quadranten der Ellipse

$$x = a\sin\varphi$$
$$y = b\cos\varphi$$

angewendet hat man (**154**, 2))

$$\varrho = \frac{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad ds = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{\pi}{2},$$

daher

$$S = \frac{1}{2ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2\, d\varphi.$$

Entwickelt man das Quadrat, so entstehen die drei Integrale (**255**, (14) und (15))

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$$

und es ergibt sich mit diesen Werten

$$S = \frac{\pi}{32ab}\left(3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2\right).$$

Subtrahirt man hiervon die Fläche $\frac{\pi ab}{4}$ des Ellipsenquadranten, so kommt man zur Fläche eines Quadranten der Evolute, d. i.

$$S_1 = \frac{3\pi c^4}{32ab} \qquad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Die Parameter a_0, b_0 in der Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_0}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

haben aber die Bedeutung $a_0 = \frac{c^2}{a}$, $b_0 = \frac{c^2}{b}$, daher hat die ganze Evolute in ihren eigenen Parametern ausgedrückt die Fläche

$$4S_1 = \frac{3}{8}\pi a_0 b_0.$$

Für $b_0 = a_0$ geht die Evolute der Ellipse in die Astroide (164, 2))

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a_0^{\frac{2}{3}}$$

über, deren Fläche hiernach gleichkommt

$$\frac{3}{8}\pi a_0^2.$$

282. *Mechanische Quadratur.* Hierunter versteht man die näherungsweise Ausrechnung eines einfachen bestimmten Integrals, bei welcher nicht der ganze Verlauf der zu integrirenden Function, sondern nur einzelne zu bestimmten Werten der Variabeln gehörige Werte derselben zur Geltung kommen.

Die Bezeichnung „Quadratur" führt das Problem daher, weil es sich in geometrischem Gewande dann einstellt, wenn eine durch Zeichnung gegebene Curve quadrirt werden soll; die in Verwendung zu ziehenden Functionswerte werden hier durch *Messung* einzelner Ordinaten gewonnen.

In andern Fällen werden diese Werte durch *messende Beobachtung* gewisser Grössen oder auch durch *Rechnung* gefunden, denn von der „mechanischen" Quadatur im Gegensatze zur strengen Integration wird auch Gebrauch gemacht, wenn der analytische Ausdruck der Function die letztere nicht zulässt.

Neben der mechanischen Quadratur einer gezeichneten Curve *durch Rechnung* kennt man auch eine solche mittels besonderer *Mechanismen* (Planimeter); diese schliessen wir aus dem Rahmen unserer Ausführungen aus.

I. Das nächstliegende Hilfsmittel zur Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)dx$$

ergibt sich unmittelbar aus dessen Definition (215); theilt man das Intervall (a, b) in n gleiche Theile $h = \frac{b-a}{n}$, so convergirt sowohl der Ausdruck

$$h\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} f(a + \varkappa h),$$

wie auch

$$h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(a + \varkappa h)$$

für $\lim h = 0$ $(nh = b - a)$ gegen den durch das Integral definirten Wert, so dass annäherungsweise gesetzt werden darf

$$(1) \quad \int_a^b f(x)dx = h[f(a) + f(a + h) + \cdots + f(b - h)]$$

wie auch

$$(2) \quad \int_a^b f(x)dx = h[f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots + f(b)];$$

der Ansatz ist umso zutreffender, je kleiner h oder je grösser n genommen wurde.

Ist $y = f(x)$ durch eine Curve dargestellt, so mögen ein für allemal die zu den Abscissen

$$a,\ a + h, \ldots a + \varkappa h, \ldots$$

gehörigen Ordinaten mit

$$y_0,\ y_1 \cdots y_\varkappa, \cdots$$

bezeichnet werden. Diese Darstellung lehrt auf einen Blick, dass bei einer beständig wachsenden Function die Formel (1) einen zu kleinen, (2) dagegen einen zu grossen Wert für das

Integral liefert, und dass bei einer beständig abnehmenden Function gerade das Umgekehrte stattfindet.

Daher darf man unter allen Umständen erwarten, dass sich das arithmetische Mittel der beiden Ausdrücke (1) und (2) dem strengen Werte des Integrals in stärkerem Maasse anpasse als jeder einzelne, dass also zutreffender

$$(3)\quad \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx \\ = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-h)\right] \end{cases}$$

oder in anderer Schreibweise

$$(4)\qquad \int_a^b y\,dx = h\left[\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right]$$

gesetzt werden könne.

Diese Formel führt aus geometrischen Gründen den Namen *Trapezformel;* denn das arithmetische Mittel aus zwei übereinander stehenden Gliedern von (1) und (2), wie

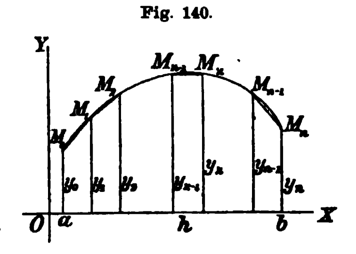
$$h\,\frac{y_{x-1}+y_x}{2},$$

bedeutet die Fläche des Trapezes, welches von den Ordinaten y_{x-1}, y_x, Fig. 140, der Abscissenaxe und der Sehne M_{x-1}, M_x begrenzt ist. Die Formel (4) setzt also an die Stelle der durch die Curve $M_0 M_n$ begrenzten Fläche diejenige, welche nach obenhin durch das Sehnenpolygon

$$M_0 M_1 \ldots M_n$$

begrenzt wird; sie gibt zu viel bei einer nach oben hin beständig concaven, zu wenig bei einer nach oben beständig convexen Curve, und nur wenn Concavität und Convexität abwechseln, ist ein theilweiser Ausgleich zu erwarten.

Fig. 140.



Beispiel. Zur Illustration diene das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

dessen strenger Wert $l.\,2 = 0{\cdot}693\,147\,18\ldots$ im voraus angebbar ist.

Wendet man darauf die Formel (4) mit $n = 8$ an, so stellt sich die Rechnung wie folgt

$$h = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_1 &= \frac{8}{9} = 0{\cdot}888\,888\,88 \\
y_2 &= \frac{4}{5} = 0{\cdot}8 \\
y_3 &= \frac{8}{11} = 0{\cdot}727\,272\,72 \\
y_4 &= \frac{2}{3} = 0{\cdot}666\,666\,66 \\
y_5 &= \frac{8}{13} = 0{\cdot}615\,384\,61 \\
y_6 &= \frac{4}{7} = 0{\cdot}571\,428\,57 \\
y_7 &= \frac{8}{15} = 0{\cdot}533\,333\,33 \\
y_8 &= \frac{1}{2} = 0{\cdot}5
\end{aligned}$$

$$\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 5{\cdot}552\,974\,75$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0{\cdot}694\,121\,84;$$

dem strengen Werte gegenüber ist dies (um $0{\cdot}000\,974\,66$) zu gross, weil die Curve $y = \frac{1}{1+x}$, eine Hyperbel, in dem Intervalle $(0, 1)$ concav nach oben ist.

II. Es liegt nahe, die obere Begrenzung der zu bestimmenden Fläche in passender Weise durch Tangenten an die Curve zu ersetzen. Am einfachsten geschieht dies in der Weise, dass man (a, b) in eine *gerade* Anzahl gleicher Theile $h = \frac{b-a}{2n}$ zerlegt, in den Endpunkten der Ordinaten $y_1, y_3, \ldots y_{2n-1}$ mit ungeradem Zeiger die Tangenten zieht und jeweilen bis zu den Nachbarordinaten links und rechts führt. Dadurch

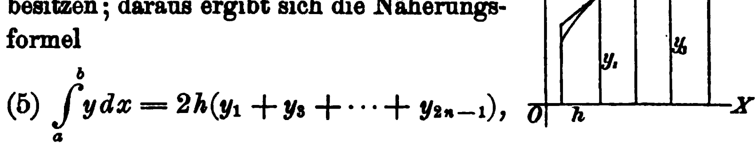
entsteht eine aus Tangenten und Ordinatenlinien zusammengesetzte polygonale Begrenzung, und die betreffende Figur, Fig. 141, zerfällt in Trapeze von der Breite $2h$, welche der Reihe nach die Inhalte

$$2hy_1, \quad 2hy_3, \ldots 2hy_{2n-1}$$

besitzen; daraus ergibt sich die Näherungsformel

$$(5) \quad \int_a^b y\,dx = 2h(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}),$$

Fig. 141.



welche dadurch bemerkenswert ist, dass sie nicht die Kenntnis aller Theilungsordinaten, sondern nur derjenigen mit ungeradem Zeiger erfordert.

Beispiel. Wendet man diese Formel auf dasselbe Integral mit $n = 8$ an, so hat man

$$h = \frac{1}{16}$$

$$y_1 = \frac{16}{17} = 0{\cdot}941\,176\,47$$

$$y_3 = \frac{16}{19} = 0{\cdot}842\,105\,26$$

$$y_5 = \frac{16}{21} = 0{\cdot}761\,904\,76$$

$$y_7 = \frac{16}{23} = 0{\cdot}695\,652\,17$$

$$y_9 = \frac{16}{25} = 0{\cdot}64$$

$$y_{11} = \frac{16}{27} = 0{\cdot}592\,592\,59$$

$$y_{13} = \frac{16}{29} = 0{\cdot}551\,724\,13$$

$$y_{15} = \frac{16}{31} = 0{\cdot}516\,129\,03$$

$$y_1 + y_3 + \cdots + y_{15} = 5{\cdot}541\,284\,41$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0{\cdot}692\,660\,73,$$

was gegenüber dem strengen Werte um 0·000 476 45 zu klein ist. Der Fehler hat, was vorauszusehen war, entgegengesetzten

Sinn, aber einen weniger als halb so grossen Betrag gegenüber dem früheren; letzteres erklärt sich dadurch, dass die Tangenten enger der Curve sich anschliessen als die Sehnen.

III. Eine weitere, von **Parmentier** herrührende Formel ergibt sich, wenn man die Curve nach Theilung von (a, b) in $2n$ Theile $h = \frac{b-a}{2n}$ durch das Sehnenpolygon $M_0 M_1 M_3 M_5 \ldots M_{2n-1} M_{2n}$ ersetzt; die so entstandene Figur zerfällt dann in zwei Trapeze von der Breite h mit den Inhalten

$$h\frac{y_0+y_1}{2}, \qquad h\frac{y_{2n-1}+y_{2n}}{2}$$

und in $n-1$ Trapeze von der Breite $2h$ mit den Flächen

$$h(y_1+y_3), \quad h(y_3+y_5), \ldots h(y_{2n-3}+y_{2n-1});$$

durch Zusammenfassung erhält man

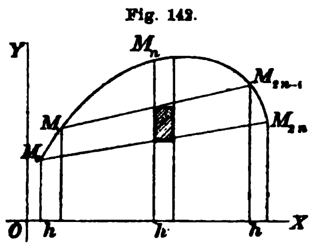
$$(6) \quad \int_a^b y\,dx = 2h\left[\frac{y_0-y_1}{4}+y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1}+\frac{y_{2n}-y_{2n-1}}{4}\right].$$

Angenommen, die Curve wäre im ganzen Verlaufe nach oben convex; dann liefert Formel (5) einen zu grossen, (6) einen zu kleinen Wert, und der Unterschied beider, d. i.

$$(7) \quad 2h\left[\frac{y_0-y_1}{4}+\frac{y_{2n}-y_{2n-1}}{4}\right] = h\left[\frac{y_0+y_{2n}}{2}-\frac{y_1+y_{2n-1}}{2}\right]$$

ist grösser als die Abweichung jedes der beiden Näherungsbeträge von dem strengen Werte. Dieser Unterschied lässt sich geometrisch leicht construiren; die Sehne $M_0 M_{2n}$, Fig. 142, schneidet nämlich auf der mittleren Ordinate y_n die Strecke $\frac{y_0+y_{2n}}{2}$, die Sehne $M_1 M_{2n-1}$ die Strecke $\frac{y_1+y_{2n-1}}{2}$ ab, und die Differenz beider Strecken bestimmt mit h ein Rechteck, das durch (7) ausgedrückt ist; dieses Rechteck gestattet dann sowohl den Fehler der Formel (5) wie jenen von (6) zu schätzen.

Fig. 142.



Die Formel (6) verlangt ausser der Messung der Ordinaten

mit ungeradem Zeiger auch die Kenntnis der beiden Endordinaten.

Beispiel. Mit $n = 8$ liefert die Formel (7) das folgende Resultat

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{8}[5{\cdot}541\,284\,41 + 0{\cdot}010\,673\,62] = 0{\cdot}693\,994\,75;$$

dasselbe ist dem strengen Werte gegenüber nur 0·000 747 57 zu gross, etwas genauer, als es bei fast gleichem Arbeitsaufwand die Trapezformel geliefert hat.

IV. Eine allgemeine Methode der mechanischen Quadratur besteht darin, dass man die Function $f(x)$ im ganzen Intervalle (a, b) oder streckenweise durch andere Functionen ersetzt, welche sich ihr in entsprechendem Maasse anschliessen und unmittelbare Integration zulassen; der Anschluss wird dadurch erzielt, dass man die Forderung aufstellt, es möge das gewählte $\varphi(x)$ an bestimmten genügend nahe an einander liegenden Stellen mit $f(x)$ übereinstimmen. Der Wert von $\int \varphi(x)dx$ ist dann ein Näherungswert für $\int f(x)dx$.

Geometrisch bedeutet dies, dass man die gezeichnete oder analytisch bestimmte Curve durch eine gesetzmässig gestaltete quadrirbare Curve ersetzt, die mit ihr eine entsprechende Anzahl vorgeschriebener Punkte gemein hat.

Der Ausführung dieser Methode schicken wir einen Satz voraus, der auch in andern Fällen nützliche Anwendung gestattet.

Ist $\varphi(x)$ eine ganze Function höchstens vom dritten Grade, so gilt in aller Strenge

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b)\right], \tag{8}$$

sodass der Wert des Integrals aus den beiden Endwerten und dem mittleren Werte der Function berechnet werden kann.

Führt man nämlich in dem Integrale die lineare Substitution

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

durch, so geht $\varphi(x)$ wieder in eine ganze Function höchstens dritten Grades von t:

$$A + Bt + Ct^2 + Dt^3,$$

dx in $\frac{b-a}{2}dt$ über und die Grenzen der neuen Integration sind -1, $+1$, sodass

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}(A + Bt + Ct^2 + Dt^3)dt$$
$$= (b-a)\left(A + \frac{C}{3}\right);$$

da nun den Werten a, $\frac{a+b}{2}$, b von x der Reihe nach die Werte -1, 0, 1 von t entsprechen, so ist

$$\varphi(a) = A - B + C - D$$
$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = A$$
$$\varphi(b) = A + B + C + D;$$

daraus folgt

$$\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b) = 6A + 2C,$$

und weiter

$$A + \frac{C}{3} = \frac{1}{6}\left[\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b)\right];$$

damit aber ist Formel (8) thatsächlich erwiesen. Man überzeugt sich leicht, dass sie in Geltung bleibt, auch wenn $\varphi(x)$ von niedrigerem als dem dritten Grade ist.

V. Um von diesem Satze bei dem Integrale $\int_a^b f(x)dx$ praktischen Gebrauch zu machen, theile man (a, b) zunächst in $2n$ gleiche Theile $h = \frac{b-a}{2n}$; in dem Doppelintervalle $(a, a + 2h)$ ersetze man $f(x)$ durch jene ganze Function

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

welche mit $f(x)$ an den Stellen a, $a + h$, $a + 2h$ übereinstimmt, dortselbst also die vorgezeichneten Werte y_0, y_1, y_2 hat — die Function ist durch diese Forderung vollständig ge-

geben; und nun ersetze man $\int\limits_a^{a+2h} f(x)\,dx$ näherungsweise durch das Integral dieser Function, d. i. laut (8) durch

$$\frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right].$$

Auf Grund analoger Erwägungen tritt an die Stelle von $\int\limits_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx$ der Ausdruck

$$\frac{h}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right],$$

u. s. w.; schliesslich an die Stelle von $\int\limits_{b-2h}^{b} f(x)\,dx$

$$\frac{h}{3}\left[y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right].$$

Durch Zusammenfassung erhält man schliesslich die Näherungsformel

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big[&y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) \\ &+ 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})\big], \end{aligned} \right.$$

welche unter dem Namen der *Simpson'schen Regel* bekannt ist.

Die geometrische Bedeutung des ganzen Vorganges liegt in Folgendem. Nachdem man die zu quadrirende Fläche durch die äquidistanten Ordinaten $y_0, y_1, \ldots y_{2n}$ in Streifen zerlegt hat, denke man sich die Bogenstücke

$$M_0M_1M_2, \quad M_2M_3M_4, \ldots M_{2n-2}M_{2n-1}M_{2n}$$

durch Parabelbögen von der Gleichungsform

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

d. i. durch Parabeln mit zu OY paralleler Axe ersetzt, deren erste durch die drei Punkte M_0, M_1, M_2, deren zweite durch M_2, M_3, M_4 hindurchgeht u. s. w. Der Ausdruck rechts in (9) gilt für die so abgeänderte Fläche, die sich bei genügend kleinem h augenscheinlich von der gegebenen nicht erheblich unterscheiden kann.

Dies bestätigt auch die folgende Untersuchung. Entwickelt man $\int\limits_a^{a+2h} f(x)\,dx$ nach der Taylor'schen Reihe, so ergibt sich

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx = 2hf(a) + 2h^2 f'(a)$$

$$+ \frac{4h^3}{3} f''(a) + \frac{2h^4}{3} f'''(a) + \frac{4h^5}{15} f^{IV}(a) + \cdots;$$

demgegenüber liefert die gleiche Entwicklung

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)]$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f(a) + 4\Big\{f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a)$$

$$+ \frac{h^4}{24}f^{IV}(a) + \cdots\Big\}$$

$$+ \Big\{f(a) + 2hf'(a) + 2h^2 f''(a) + \frac{4h^3}{3}f'''(a) + \frac{2h^4}{3}f^{IV}(a) + \cdots\Big\}\Big]$$

$$= 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4h^3}{3}f''(a) + \frac{2h^4}{3}f'''(a) + \frac{5h^5}{18}f^{IV}(a) + \cdots;$$

hiernach beträgt der Unterschied beider Grössen mit Ausserachtlassung von Gliedern höherer als der fünften Ordnung in Bezug auf h

$$\frac{4h^5}{15}f^{IV}(a) - \frac{5h^5}{18}f^{IV}(a) = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(a).$$

Für das nächste Intervall $(a + 2h,\ a + 4h)$ ergibt sich auf gleiche Weise

$$-\frac{h^5}{90}f^{IV}(a + 2h);$$

schliesslich für das Endintervall $(b - 2h,\ b)$

$$-\frac{h^5}{90}f^{IV}(b - 2h).$$

Demnach beträgt der Unterschied zwischen der linken und rechten Seite von (9) bei Beschränkung auf Glieder der fünften Ordnung

$$-\frac{h^5}{90}[f^{IV}(a) + f^{IV}(a + 2h) + \cdots + f^{IV}(b - 2h)],$$

wofür, wenn u ein zwischen a, b passend gewählter Wert ist,

$$(10) \qquad -\frac{nh^5}{90}f^{IV}(u) = -\frac{(2nh)^5}{2^5 n^4 \cdot 90}f^{IV}(u) = -\frac{(b-a)^5}{2880 n^4}f^{IV}(u)$$

geschrieben werden kann. Wie man erkennt, nimmt der zu befürchtende Fehler mit wachsendem n sehr rasch ab.

Beispiel. Bei Anwendung der Simpson'schen Regel auf das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

hat man für $n = 8$ folgende Rechnung:

$$h = \frac{1}{16}$$

$y_0 = 1$

$y_{16} = \frac{0{\cdot}5}{1{\cdot}5}$

$y_2 = 0{\cdot}888\,888\,88$	$y_1 = 0{\cdot}941\,176\,47'$
$y_4 = 0{\cdot}8$	$y_3 = 0{\cdot}842\,105\,26$
$y_6 = 0{\cdot}727\,272\,72$	$y_5 = 0{\cdot}761\,904\,76$
$y_8 = 0{\cdot}666\,666\,66$	$y_7 = 0{\cdot}695\,652\,17$
$y_{10} = 0{\cdot}615\,384\,61$	$y_9 = 0{\cdot}64$
$y_{12} = 0{\cdot}571\,428\,57$	$y_{11} = 0{\cdot}592\,592\,59$
$y_{14} = 0{\cdot}533\,333\,33$	$y_{13} = 0{\cdot}551\,724\,13$
$4{\cdot}802\,974\,75$	$y_{15} = 0{\cdot}516\,129\,03$
	$5{\cdot}541\,284\,41$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{48}[1{\cdot}5 + 2.4{\cdot}802\,974\,75 + 4.5{\cdot}541\,284\,41]$$
$$= 0{\cdot}693\,147\,64;$$

dem strengen Werte gegenüber ist dies nur mehr um $0{\cdot}000\,000\,46$ zu gross.

Die Schätzung des Fehlers nach der Formel (10) ergibt folgendes Resultat. Aus

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{folgt} \quad f^{IV}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5},$$

mithin ist der Fehler ausgedrückt durch $-\frac{4!}{2880.8^4(1+u)^5}$ oder

$$-\frac{1}{491520(1+u)^5},$$

wobei u einen unbestimmten positiven echten Bruch bedeutet; die äussersten Grenzen hiervon, entsprechend den Werten $u = 0$ und $u = 1$, sind

$$-0{\cdot}000\,002\,03 \quad \text{und} \quad -0{\cdot}000\,000\,06,$$

sodass der Wert des Integrals mit Sicherheit zwischen

$$0{\cdot}693\,147\,64 - 0{\cdot}000\,002\,03 = 0{\cdot}693\,145\,61$$

und

$$0{\cdot}693\,147\,64 - 0{\cdot}000\,000\,06 = 0{\cdot}693\,147\,58$$

enthalten ist; dies trifft auch thatsächlich zu.

§ 2. Rectification von Curven.

283. In Art. **147** ist die Länge eines Curvenbogens als Grenzwert der Länge eines ihm eingeschriebenen Sehnenzuges definirt worden, dessen Seitenanzahl beständig wächst und dessen jede Seite gegen Null convergirt, die Existenz eines solchen Grenzwertes vorausgesetzt. Die Bestimmung der so definirten Länge wird als *Rectification* der Curve bezeichnet.

Angenommen,

$$y = f(x)$$

sei die Gleichung der Curve, a, b seien die Abscissen der Endpunkte des Bogens. Die Eckpunkte $M_0, M_2, \ldots M_{2n-2}, M_{2n}$ des Polygons, bis auf M_0, M_{2n} willkürlich angenommen, mögen die Abscissen

$$a = x_0, \; x_2, \ldots x_{2n-2}, \; x_{2n} = b$$

haben; die Länge der Seite $M_{2k-2}M_{2k}$ ist dann durch die positive Quadratwurzel

$$\sqrt{(x_{2k} - x_{2k-2})^2 + (f(x_{2k}) - f(x_{2k-2}))^2}$$

gegeben und die Länge des ganzen Polygons durch

$$\sum_1^n {}^k \sqrt{(x_{2k} - x_{2k-2})^2 + (f(x_{2k}) - f(x_{2k-2}))^2}.$$

Hat nun $f(x)$ an jeder Stelle von (a, b) einen Differentialquotienten, so ist dem Mittelwertsatze (37) zufolge

$$f(x_{2k}) - f(x_{2k-2}) = (x_{2k} - x_{2k-2})f'(x_{2k-1})$$

für $k = 1, 2, \ldots n$; x_{2k-1} bezeichnet dabei einen *bestimmten* Wert zwischen x_{2k-2} und x_{2k}. Unter diesen Voraussetzungen ist die Länge des Polygons

$$\sum_1^n {}^k (x_{2k} - x_{2k-2}) \sqrt{1 + f'(x_{2k-1})^2}.$$

Nach 213 aber convergirt dieser Ausdruck, während n beständig wächst und jedes $x_{2k} - x_{2k-2}$ gegen Null ab-

nimmt, gegen eine bestimmte Grenze, nämlich gegen den Integralwert

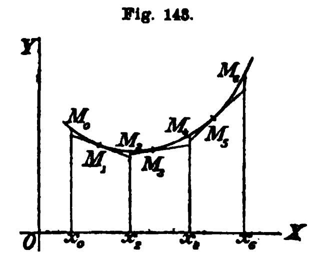
$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

wenn nur $\sqrt{1 + f'(x)^2}$, also auch $f'(x)$, eine in dem Intervalle (a, b) endliche und stetige Function ist. Der Definition gemäss ist also die Länge des Bogens $M_0 M_{2n}$ ausgedrückt durch

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{1}$$

Weil der Grenzwert der obigen Summe derselbe bleibt, wenn man die x_{2k-1} durch *beliebige* Zwischenwerte ersetzt, so gilt der Satz: Zieht man an die Bogenstücke $M_0 M_2, M_2 M_4, M_4 M_6, \ldots$, Fig. 143, in beliebigen Punkten M_1, M_3, $M_5, \ldots$ Tangenten und begrenzt diese durch die benachbarten Theilungsordinaten, so ist der Grenzwert der Summe dieser Tangentenstücke unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte und gleich der Länge des ganzen Bogens.

Fig. 143.



Führt man an Stelle von x eine neue Variable u ein durch die Substitution

$$x = x(u),$$

wodurch vermöge der Curvengleichung auch

$$y = y(u)$$

wird, so kommt an die Stelle von y' der Quotient $\frac{y'(u)}{x'(u)}$ (42, II) und an die Stelle von dx der Ausdruck $x'(u)du$; sind demnach α, β die den Werten a, b von x entsprechenden Werte der Variabeln u, so gilt

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du, \tag{2}$$

eine Formel, die bei parametrischer Darstellung der Curve zur Anwendung kommt.

Der Fall polarer Coordinaten kann als besonderer Fall von diesem angesehen werden; ist nämlich $r = f(\varphi)$ die Gleichung der Curve, so können auf Grund derselben und der Transformationsgleichungen

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

x und y als Functionen von φ aufgefasst werden, und es ist

$$x'(\varphi) = -r \sin \varphi + r' \cos \varphi$$
$$y'(\varphi) = \quad r \cos \varphi + r' \sin \varphi;$$

daraus folgt

$$x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2 = r^2 + r'^2,$$

sodass, wenn wieder α, β die den beiden Endpunkten des Bogens entsprechenden Werte von φ bedeuten,

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi \tag{3}$$

ist.

Auf Raumcurven lässt sich die an die Spitze dieses Artikels gestellte Definition der Bogenlänge ohneweiters übertragen und führt, wenn man y und z als Functionen von x darstellt, zu der Formel

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx. \tag{4}$$

Dieselbe gestaltet sich wie oben um in

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}\, du, \tag{5}$$

wenn x und infolge dessen auch y und z als Functionen eines Parameters u dargestellt werden.

Als besonderer Fall sei eine *sphärische Curve* erwähnt; ist a der Halbmesser der Kugel, auf der sie liegt, wird das Centrum der Kugel als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, so ist die Curve in räumlichen Polarcoordinaten durch

$$r = a, \qquad \theta = f(\varphi)$$

bestimmt; auf Grund dessen und der Transformationsgleichungen

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

können x, y, z als Functionen von φ betrachtet werden, und es ist

$$x'(\varphi) = \quad a \cos\theta \cos\varphi \cdot \theta' - a \sin\theta \sin\varphi$$
$$y'(\varphi) = \quad a \cos\theta \sin\varphi \cdot \theta' + a \sin\theta \cos\varphi$$
$$z'(\varphi) = -a \sin\theta \cdot \theta';$$

daraus folgt

$$x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2 + z'(\varphi)^2 = a^2\theta'^2 + a^2 \sin^2\theta$$

und vermöge (5)

$$s = a\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta} \cdot d\varphi; \tag{6}$$

θ' ist der Differentialquotient von θ in Bezug auf φ, und α, β sind die den Endpunkten des Bogens zugehörigen Werte von φ.

Die Elemente der Integrale (1), (2), (3), (5) sind schon an andern Stellen (**148**, **149**, **167**) als *Bogendifferentiale* abgeleitet, definirt und geometrisch gedeutet worden.

284. *Beispiele.* 1) *Rectification der Parabel.* Bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems ist

$$x^2 = 2py$$

die Gleichung der Parabel; aus ihr folgt $y' = \frac{x}{p}$, und laut (1) ist

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda x} \sqrt{1 + u^2}\, du$$

die Länge des im Scheitel beginnenden Bogens, dessen Endpunkt die Abscisse x hat; die zweite Form geht aus der ersten durch die Substitution

$$\frac{1}{p} = \lambda, \qquad \frac{x}{p} = u$$

hervor.

Das auszuführende Integral ist nach **240**, (31) zunächst

$$\int \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

und nach **239**, (26) endgiltig

$$= \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\, l.\left(u + \sqrt{1+u^2}\right);$$

mithin ist

$$s = \frac{1}{2\lambda}\left[\lambda x\sqrt{1+\lambda^2 x^2} + l.\left(\lambda x + \sqrt{1+\lambda^2 x^2}\right)\right]$$

oder, wenn man für λ wieder seinen Wert setzt,

$$s = \frac{p}{2}\left[\frac{x}{p}\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} + l.\left(\frac{x}{p} + \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\right)\right].$$

2) *Rectification der Cykloide.* Aus ihren Gleichungen

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u)$$

folgt

$$x'(u) = a(1 - \cos u), \qquad y'(u) = a \sin u,$$

und daraus nach der Formel (2) für die Länge eines im Ursprunge beginnenden Bogens der Ausdruck

$$s = 2a\int_0^u \sin\frac{u}{2}\,du = 8a\sin^2\frac{u}{4}.$$

Setzt man insbesondere $u = 2\pi$, so erhält man die Länge eines ganzen Astes der Cykloide

$$s_0 = 8a,$$

welche demnach gleichkommt dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises.

3) *Rectification der Lemniscate.* Auf das Polarsystem OX, **127**, 2), bezogen lautet die Gleichung

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi};$$

daraus ergibt sich

$$r' = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

sodass der vom Scheitel A bis zu einem Punkte mit der Amplitude $\varphi < \frac{\pi}{4}$ reichende Bogen gleichkommt

$$s = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}}.$$

Führt man hier die Substitution

$$\sqrt{2}\sin\varphi = \sin\psi \tag{a}$$

aus, vermöge welcher

$$\sqrt{2}\cos\varphi\, d\varphi = \cos\psi\, d\psi$$
$$\sqrt{1-2\sin^2\varphi} = \cos\psi$$
$$\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi},$$

sodass durch entsprechende Verbindung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}}$$

gefunden wird, so ergibt sich

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}},$$

wobei die obere Grenze ψ der früheren oberen Grenze vermöge der Gleichung (a) zugeordnet ist.

Das zu vollführende Integral ist ein elliptisches Integral erster Gattung mit dem Modul $\frac{1}{\sqrt{2}}$; die Reihenentwicklung eines solchen ist in **266**, 6) vollzogen worden.

Dem Quadranten der Lemniscate entspricht die obere Grenze $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und dieser der Wert $\psi = \frac{\pi}{2}$, sodass der Quadrant

$$\frac{L}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}}$$

durch das vollständige Integral ausgedrückt ist, dessen Wert an der angeführten Stelle gleichfalls angegeben wurde.

4) *Rectification der Ellipse.* Wenn man die Coordinaten eines Punktes M der Ellipse durch dessen excentrische Anomalie φ (**154**, 2)) ausdrückt:

$$x = a\sin\varphi \qquad (a > b),$$
$$y = b\cos\varphi$$

so kann das Bogendifferential in einer der beiden Formen

(A) $$ds = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

(B) $$ds = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi}\, d\varphi = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

dargestellt werden; behält man die zweite Form bei, so ist der vom Scheitel $(0/b)$ der kleinen Axe bis zum Punkte M reichende Bogen durch

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

gegeben; seine Bestimmung hängt also von einem elliptischen Integrale zweiter Gattung ab, dessen Modul der relativen Excentricität $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ der Ellipse gleichkommt; die Reihenentwicklung eines solchen Integrals ist in **266**, 7) vorgenommen worden. Insbesondere hat man nach den dortigen Entwicklungen für den Ellipsenquadranten den Ausdruck

(C) $$\begin{cases} \dfrac{E}{4} = a \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi \\ = \dfrac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \dfrac{\varepsilon^2}{1} - \left(\dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \dfrac{\varepsilon^4}{3} - \cdots\right]. \end{cases}$$

Da

$$b < \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} < a,$$

wie man sich überzeugt, wenn man unter der Wurzel einmal a durch b, ein zweitesmal b durch a ersetzt, so ist auch

$$2\pi b < \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi < 2\pi a;$$

vermöge der Form (A) drückt aber das Integral den Umfang E der Ellipse aus; derselbe liegt also, wie es auch der Augenschein lehrt, zwischen den Umfängen des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises.

Wir stellen nun die Frage auf, wie sich E zu dem arithmetischen Mittel $\pi(a + b)$ dieser beiden Umfänge verhält. Da $\pi(a + b)$ durch Integration von $a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi$ auf dem Intervalle $(0,\ 2\pi)$ entsteht, so bilden wir

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} - (a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)$$
$$= \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - (a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)^2}{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi + \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$
$$= (a-b)^2 \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi + \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}};$$

daraus folgt durch Integration von 0 bis 2π

$$E - \pi(a+b)$$
$$= (a-b)^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi + \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

woraus schon die wichtige Thatsache, dass immer $E > \pi(a+b)$ ist, entnommen werden kann.

Um Grenzen für den Unterschied zu erhalten, bemerke man, dass*)

$$\frac{1}{2a} < \frac{1}{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi + \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} < \frac{1}{2b};$$

daraus ergibt sich weiter

$$\frac{1}{2a}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi$$
$$< \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi + \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} < \frac{1}{2b}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi;$$

da nun

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

so liegt der Wert des eingeschlossenen Integrals zwischen $\frac{\pi}{8a}$ und $\frac{\pi}{8b}$.

Es ist also

$$\frac{\pi(a-b)^2}{8a} < E - \pi(a+b) < \frac{\pi(a-b)^2}{8b},$$

sodass

$$\text{(D)} \quad \pi(a+b) + \frac{\pi(a-b)^2}{8a} < E < \pi(a+b) + \frac{\pi(a-b)^2}{8b}.$$

---

*) Man überzeugt sich hiervon wieder, indem man im Nenner einmal a für b, ein zweitesmal b für a setzt.

Hiermit sind leicht berechenbare Grenzen für den Umfang der Ellipse gefunden.

Wäre beispielsweise $a = 21$ cm, $b = 20$ cm, woraus die relative Excentricität $\varepsilon = \frac{\sqrt{41}}{21} = 0{\cdot}349\ldots$ folgt, so ergäbe die Ausführung von (D)

$$128{\cdot}824\,000 < E < 128{\cdot}824\,92,$$

sodass der Umfang der Ellipse auf drei Stellen, d. i. auf Hundertelmillimeter genau gleichkommt

$$E = 128{\cdot}824\ldots \text{cm};$$

die Erzielung eines gleich genauen Resultates mit Hilfe der Reihenentwicklung (C) würde einen weit grösseren Arbeitsaufwand erfordern.

5) *Rectification der Raumcurve vierter Ordnung* $x^2 = 2py$, $x^2 = 2qz$. Aus ihren Gleichungen folgt

$$y' = \frac{x}{p}, \qquad z' = \frac{x}{q};$$

mithin ist laut Formel (4) der vom Ursprunge bis zum Punkte $x/y/z$ gezählte Bogen

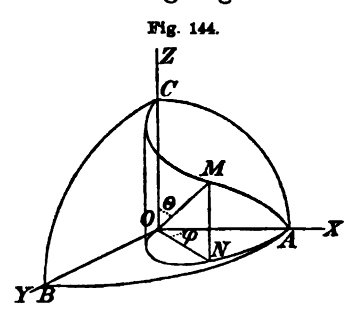
$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) x^2}\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda x} \sqrt{1 + u^2}\, du;$$

die zweite Form wird durch die Substitution

$$\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}} = \lambda, \qquad \lambda x = u$$

herbeigeführt. Im Hinblick auf das Beispiel 1) ist also der räumliche Bogen gleich dem der ebenen Parabel

Fig. 144.



$$x^2 = \frac{2pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}\, y,$$

gezählt vom Ursprunge bis zu der nämlichen Abscisse x, wie sie dem Endpunkte des räumlichen Bogens entsprach.

6) *Rectification der sphärischen Curve*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax.$$

In räumlichen Polarcoordinaten hat die Curve, von welcher Fig. 144 einen Quadranten zur Anschauung bringt, die Gleichungen

$$r = a, \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

nach Formel (6) ist daher die Länge des Bogens AM

$$s = a\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi = a\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{2-\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= a\sqrt{2}\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

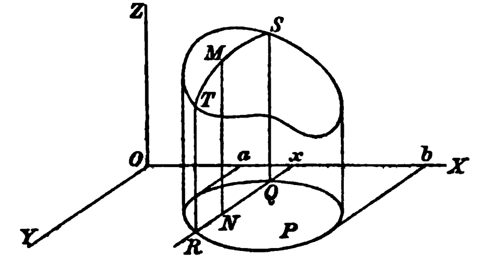
Vergleicht man dies mit den Resultaten in Beispiel 4), so ergibt sich, dass der genannte sphärische Bogen gleichkommt dem Bogen einer Ellipse mit der grossen Halbaxe $a\sqrt{2}$, der relativen Excentricität $\frac{1}{\sqrt{2}}$, also der kleinen Halbaxe a, gezählt vom Scheitel der Nebenaxe bis zu dem Punkte mit der excentrischen Anomalie φ; insbesondere ist der Quadrant AC der räumlichen Curve ebenso lang als der Quadrant jener Ellipse.

§ 3. Cubatur krummer Flächen.

285. Die Grundaufgabe der Cubatur: Das Volumen eines cylindrischen, in der Richtung der Z-Axe sich erstreckenden Körpers zu berechnen, dessen untere Begrenzung durch die in der xy-Ebene liegende Figur P, Fig. 145, dessen obere Begrenzung durch die Fläche

$$z = f(x, y)$$

Fig. 145.



gebildet wird, — ist in 274 gelöst worden, und zwar ergab sich für jenes Volum v die Formel

$$v = \iint\limits_P z\,dx\,dy \tag{1}$$

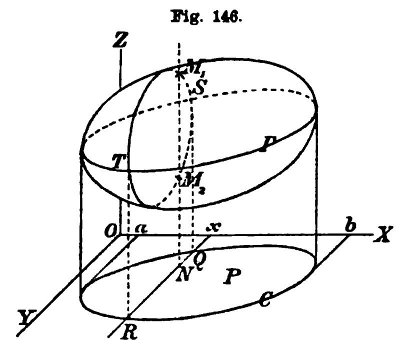
und nach Ausführung einer Integration, z. B. derjenigen nach y,

$$v = \int\limits_a^b u\,dx; \tag{2}$$

hierin bedeutet u den Querschnitt $QRTS$ des beschriebenen Körpers, geführt im Abstande x parallel zur yz-Ebene.

Diese Formeln sollen nun verallgemeinert werden. Es handle sich um das Volumen eines von einer geschlossenen krummen Fläche begrenzten Körpers, Fig. 146; die Begrenzungsfläche werde von jeder Parallelen zur z-Axe, deren Fusspunkt N in der xy-Ebene innerhalb des sichtbaren Umrisses C des Körpers, also in der Figur P gelegen ist, zweimal, in den Punkten M_1, M_2 getroffen. Durch die Berührungscurve Γ des umschriebenen Cylinders ist die Oberfläche des Körpers in zwei Theile, einen oberen und einen unteren, zerlegt; ersterer begrenzt einen Cylinder über P als Basis, dessen Volumen

Fig. 146.



$$\iint\limits_P z_1\, dx\, dy$$

ist, wenn $z_1 = NM_1$; der letztere begrenzt einen zweiten Cylinder vom Volumen

$$\iint\limits_P z_2\, dx\, dy,$$

wo $z_2 = NM_2$. Der Unterschied beider gibt das gesuchte Volumen, wofür hiernach die Formel

$$v = \iint\limits_P (z_1 - z_2)\, dx\, dy \tag{3}$$

gilt. Dies bleibt auch bestehen, wenn die Oberfläche des Körpers die xy-Ebene schneiden sollte (s. Bemerkung zu Fig. 124).

Man kann aber das Volumen des ersten Cylinders auch durch

$$\int_a^b u_1\, dx,$$

wobei $u = QRTM_1SQ$, das des zweiten durch

$$\int_a^b u_2\,dx,$$

wobei $u_2 = QRTM_2SQ$, ausdrücken, und erhält dann für das Volumen des vorgelegten Körpers den Ausdruck

$$v = \int_a^b (u_1 - u_2)\,dx;$$

da aber $u_1 - u_2 = u$ die Fläche des Querschnittes SM_1TM_2 darstellt, so kann auch

$$v = \int_a^b u\,dx \tag{4}$$

geschrieben werden. Die Formel (2) ist hiermit als allgemein giltig erwiesen. Das Volumen erscheint nun als Grenzwert der Summe von Cylindern parallel der x-Axe, welche Querschnitte u parallel zur yz-Ebene zu Grundflächen und deren Abstände zu Höhen haben.

Die Formeln (2), (4) kommen zur Anwendung, wenn der Querschnitt u eine Figur von bekanntem Flächeninhalte ist; in den andern Fällen treten die Formeln (1), (3) in Kraft. Bei Ausführung der Integrale wird selbstverständlich von all' den entwickelten Hilfsmitteln entsprechender Gebrauch zu machen sein.

Der hier erörterte Fall, wo die Cubatur durch ein einfaches Integral geleistet wird, ist nicht der einzige dieser Art; immer, wenn es gelingt, den Körper in unendlich kleine Elemente der ersten Ordnung zu zerlegen, deren analytischer Ausdruck sich angeben lässt, kommt es auf eine einmalige Integration an.

Unter Umständen kann es sich empfehlen, den Körper in unendlich kleine Elemente von der dritten Ordnung zu zerlegen und sein Volumen zunächst durch ein dreifaches Integral darzustellen, das sich über den Raum R des Körpers ausdehnt. Bei rechtwinkligen Coordinaten ist dann (**278**)

$$v = \iiint_R dx\,dy\,dz \tag{5}$$

und bei räumlichen Polarcoordinaten

$$(6) \qquad v = \iiint_R r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi;$$

in letzterem Falle lässt sich aber die eine Integration, die nach r, ausführen. Fassen wir den Fall ins Auge, dass der Ursprung O sich innerhalb des Körpers befindet und die Begrenzungsfläche desselben durch

$$(7) \qquad r = f(\theta, \varphi)$$

gegeben ist, wobei f eine eindeutige Function bedeuten soll; dann gibt die Integration in Bezug auf r

$$\int_0^r r^2 \, dr = \frac{1}{3} r^3$$

und es wird

$$(8) \qquad v = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^3 \sin\theta \, d\theta,$$

worin für r der Ausdruck aus (7) zu setzen ist; diese Darstellung entspricht — bis auf Grössen höherer als der zweiten Ordnung — einer Zerlegung des Körpers in Kegel mit der Spitze O, der Basis $r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ und der Höhe r.

286. *Beispiele* von Cubaturen mittels eines einfachen Integrals.

1) *Cubatur des Kegels und des Kegelstutzes.* Ordnet man den Kegel derart an, dass seine Spitze mit dem Ursprunge zusammenfällt und seine Grundfläche G zur x-Axe normal steht, so ist der Querschnitt im Abstande x

$$u = \frac{Gx^2}{H^2},$$

wenn H die Höhe des Kegels bedeutet. Daher hat man nach (4)

$$v = \frac{G}{H^2} \int_0^H x^2 \, dx = \frac{GH}{3}.$$

Wird derselbe Kegel durch einen Querschnitt im Abstande H_1 von der Spitze gestutzt, so hat der Stutz das Volumen

$$v = \frac{G}{H^2} \int_{H_1}^H x^2 \, dx = \frac{G(H^3 - H_1^3)}{3H^2} = \frac{H - H_1}{3} \frac{G(H^2 + HH_1 + H_1^2)}{H^2}$$
$$= \frac{H - H_1}{3} \left(G + G\frac{H_1}{H} + G\frac{H_1^2}{H^2} \right);$$

es ist aber $H_1 - H = h$ die Höhe, $G\frac{H_1^2}{H^2} = g$ die zweite Grundfläche des Stutzes, endlich $G\frac{H_1}{H} = \sqrt{Gg}$, daher

$$v = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g).$$

2) *Cubatur des allgemeinen Ellipsoids*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Der Querschnitt im Abstande x ist eine Ellipse, deren Projection auf der yz-Ebene die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

hat; hiernach ist die Fläche dieses Querschnitts

$$u = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Da dies eine ganze Function des zweiten Grades ist, so kann man nach dem in 282, IV entwickelten Satze schreiben

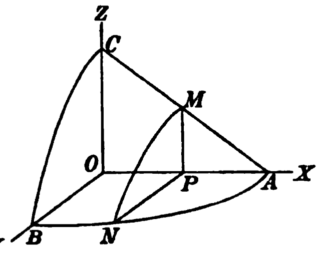
$$v = \int_{-a}^{a} u\,dx = \frac{2a}{6}(u_{-a} + 4u_0 + u_a);$$

es ist aber $u_{-a} = u_a = 0$, $u_0 = \pi bc$, folglich

$$v = \frac{4}{3}\pi abc.$$

3) *Cubatur des Körpers* $OABC$, Fig. 147, dessen Basis ein Ellipsenquadrant mit den Halbaxen $OA = a$, $OB = b$, dessen rückwärtige Begrenzung das Dreieck OAC mit $OC = c$ ist, und dessen zur yz-Ebene parallele Querschnitte durch Parabeln MN mit der Axe MP und dem Scheitel M begrenzt sind.

Fig. 147.



Der Querschnitt im Abstande $OP = x$ hat die Grösse

$$u = \frac{2}{3} PN \cdot PM;$$

darin ist $PN = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $PM = \frac{c}{a}(a - x)$; daher

$$u = \frac{2bc}{3a^2}(a - x)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Demnach hat man (**255**, 3))

$$v = \frac{2bc}{3a^2}\int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{2bc}{3a^2}\left\{a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx - \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right\}$$

$$= \frac{2bc}{3a^2}\left\{\frac{\pi a^3}{4} + \frac{1}{3}\Big|_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2abc}{3}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right\}.$$

4) *Cubatur von Rotationskörpern.* Rotirt die Figur $ABDC$, Fig. 148, um OX, so beschreiben AC, BD Kreisflächen und der Bogen CD eine Rotationsfläche; der von diesen dreien begrenzte Körper hat im Abstande x von O den zu OX senkrechten Querschnitt

Fig. 148.

$$u = \pi y^2,$$

daher das Volumen

$$v = \pi\int_a^b y^2\,dx\,; \tag{9}$$

y ist vermöge der Gleichung der Curve CD als Function von x gegeben.

Umdrehungskörper der Lemniscate. Aus der Gleichung (**127**, 2))

$$(x^2+y^2)^2 + a^2(y^2-x^2) = 0$$

berechnet sich das Quadrat der *reellen* zu x gehörigen Ordinate

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{a^2+8x^2} - a^2 - 2x^2\right);$$

demnach ist das Volumen des von dem einen Oval beschriebenen Körpers

$$v = \frac{\pi}{2}\int_0^a \left(a\sqrt{a^2+8x^2} - a^2 - 2x^2\right)dx.$$

Nun hat man nach einem **284**, 1) erläuterten Vorgange

$$\int_0^a \sqrt{a^2 + 8x^2}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{2}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2} + \frac{a^2}{16}\,l.\left(x + \sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2}\right)\right\}_0^a$$

$$= 2\sqrt{2}\left\{\frac{3a^2}{8}\sqrt{2} + \frac{a^2}{16}\,l.(3 + 2\sqrt{2})\right\};$$

die noch erübrigende Integration ist leicht auszuführen. Nach entsprechender Reduction ergibt sich

$$v = \frac{\pi a^3}{48}\,[3\sqrt{2}\,l.(3 + 2\sqrt{2}) - 4].$$

Umdrehungskörper der Cykloide. Aus den Gleichungen

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u)$$

folgt $y^2 dx = a^3(1 - \cos u)^3 du$; demnach ist das von der Fläche eines Cykloidenastes beschriebene Volumen

$$v = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos u)^3\,du$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{u}{2}\,du;$$

und da

$$\int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{u}{2}\,du = 2\int_0^{\pi} \sin^6 w\,dw = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 w\,dw$$

$$= 4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\,\pi,$$

so hat man schliesslich

$$v = 5\pi^2 a^3.$$

Anmerkung. Schreibt man die Formel (9) in der Gestalt

$$v = 2\pi \int_a^b \frac{y}{2}\,y\,dx,$$

so erkennt man in dem Integrale, das neben 2π steht, das statische Moment der Figur $ABDC$, Fig. 148, in Bezug auf OX, welches

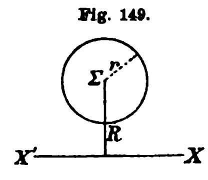
auch gleichkommt dem Producte aus der Fläche S der Figur mit der Ordinate Y ihres Schwerpunktes Σ; hiernach ist auch

(10) $$v = 2\pi Y \cdot S.$$

In dieser Formel spricht sich die nach Guldin benannte Regel aus, *wornach das von einer Figur von der Fläche* S *bei voller Rotation beschriebene Volumen gleichkommt dem eines Cylinders von der Basis S und einer Höhe, welche durch den Umfang des vom Schwerpunkte der Figur beschriebenen Kreises gemessen wird.*

Bei bekanntem S und Y dient die Formel (10) zur Cubatur, bei bekanntem v und S zur Schwerpunktbestimmung.

Fig. 149.



So hat der von dem Kreise Fig. 149 beschriebene Torus (**185**, 3)) das Volumen

$$v = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2 \qquad (R \geqq r);$$

hingegen ergibt sich aus dem oben gefundenen Volumen des Umdrehungskörpers der Cykloide und ihrer in **281**, 4) berechneten Fläche $S = 3\pi a^2$ die Schwerpunktsordinate

$$Y = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5}{6} a,$$

durch welche der Schwerpunkt der Figur völlig bestimmt ist.

5) Das Volumen eines Cylinders zu bestimmen, dessen Basis P von der Ellipse

(A) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda \qquad (\lambda > 0)$$

und der nach oben durch eine Fläche der Gleichungsform

(B) $$z = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

begrenzt ist.

Längs der Ellipse

(C) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = w \qquad (w > 0)$$

hat z den constanten Wert $f(w)$, beschreibt also eine Cylinderfläche von dieser Höhe und von der Basisfläche

$$\pi a b w;$$

ändert man w um dw, so ändert sich diese Basisfläche um einen elliptischen Ring, dessen Inhalt bis auf Grössen höherer Ordnung in dw gleich

$$\pi a b dw$$

ist; über diesem Ringe ruht nun eine cylindrische Schale, welche als Element des zu cubirenden Körpers aufgefasst werden kann und das Volumen

$$\pi ab f(w) dw$$

hat.

Während die veränderliche Ellipse (C) das Gebiet P beschreibt, durchläuft w das Intervall $(0, \lambda)$; denn $w = 0$ entspricht der Ursprung O und $w = \lambda$ die Randellipse (A). Demnach ist das gesuchte Volumen

$$\text{(D)} \qquad v = \pi ab \int_0^\lambda f(w) dw.$$

Nach dieser Methode kann beispielsweise das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

cubirt werden; denn

$$z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

hat die Gestalt (B) und die Randellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Form (A); demnach ist das halbe Volumen des Ellipsoids

$$v = \pi abc \int_0^1 \sqrt{1 - w}\, dw = \frac{2}{3} \pi abc \left\{(1 - w)^{\frac{3}{2}}\right\}_1^0 = \frac{2}{3} \pi abc$$

und das ganze Volumen $\frac{4}{3} \pi abc$ wie in 2).

Ist

$$z = e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

die krumme Fläche und (A) die Randellipse von P, so hat man

$$v = \pi ab \int_0^\lambda e^{-w} dw = \pi ab(1 - e^{-\lambda});$$

für $\lim \lambda = \infty$ verwandelt sich P in die unendliche Ebene, der Wert des Integrals aber convergirt gegen die bestimmte Grenze πab; hiernach ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy = \pi ab,$$

und weil die beiden Integrationen völlig unabhängig von einander sind,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = a\sqrt{\pi}$$

(vgl. **276**, 3)).

6) Das Volumen eines Cylinders zu bestimmen, dessen Basis P der erste Quadrant des Kreises

(A) $$x^2 + y^2 = R^2$$

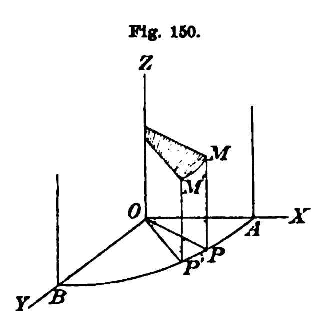
ist und der nach oben hin durch eine Fläche von der Gleichungsform

(B) $$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

begrenzt wird.

Längs des Strahles OP, Fig. 150:

Fig. 150.



(C) $$\frac{y}{x} = \omega$$

hat z den constanten Wert

$$f(\omega) = PM;$$

variirt ω um $d\omega$, so ändert sich der Kreissector OAP, dessen Fläche

$$\frac{1}{2} R^2 \operatorname{arctg} \omega$$

ist, um OPP', das bis auf Grössen höherer Ordnung in $d\omega$ gleichkommt

$$\frac{1}{2} R^2 \frac{d\omega}{1+\omega^2};$$

das über OPP' ruhende keilförmige Element des Körpers kann als Prisma angesehen und dem Volumen nach durch

$$\frac{1}{2} R^2 \frac{f(\omega)\, d\omega}{1+\omega^2}$$

ausgedrückt werden.

Da nun ω, während der Strahl OP den ersten Quadranten XOY beschreibt, das Intervall $(0, \infty)$ durchläuft, so ist

(D) $$v = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{\infty} \frac{f(\omega)\, d\omega}{1+\omega^2}.$$

Als Beispiel hierzu diene die Bestimmung des Raumes unter dem ersten Viertelgang der Wendelfläche

$$z = b \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

innerhalb des Cylinders (A). Nach Formel (D) hat man unmittelbar

$$v = \frac{1}{2}\, b R^2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\omega\, d\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{4}\, b R^2 \left\{\operatorname{arctg}^2 \omega\right\}_0^\infty = \frac{\pi^2 b R^2}{16}.$$

287. *Beispiele* von Cubaturen mittels eines Doppelintegrals.

1) Das Volumen des Körpers zu berechnen, der von den fünf Ebenen $z = 0$; $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = \gamma$, $y = \delta$ und von der krummen Fläche

$$xyz = c^3$$

begrenzt wird.

Nach Formel (1) hat man hiefür ohneweiters

$$v = c^3 \iint \frac{dx\,dy}{xy} = c^3 \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} \int_\gamma^\delta \frac{dy}{y} = c^3\, l.\frac{\beta}{\alpha}\, l.\frac{\delta}{\gamma}.$$

2) Das von der xy-Ebene, dem elliptischen Cylinder

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 = 1$$

und dem hyperbolischen Paraboloid

$$z = \frac{xy}{c}$$

begrenzte Volumen zu cubiren.

Im Hinblick auf das Integrationsgebiet P, Fig. 151, ergeben sich als Grenzen bei Vornahme der Integration nach y

Fig. 151.

$$y_1 = \beta - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}$$

$$y_2 = \beta + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}$$

und als Grenzen der darauffolgenden Integration nach x

$$\alpha - a, \qquad \alpha + a.$$

Hiernach ist

$$v = \frac{1}{c}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a} x\,dx \int_{y_1}^{y_2} y\,dy = \frac{1}{2c}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a} (y_2^2 - y_1^2)\, x\,dx;$$

nun ist $y_2^2 - y_1^2 = (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 4\frac{b\beta}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}$, daher weiter

$$v = \frac{2b\beta}{ac}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a} x\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}\,dx = \frac{2b\beta}{ac}\int_{-a}^{a}(\xi+\alpha)\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi,$$

wenn man die Substitution $x - \alpha = \xi$ anwendet; es ist aber (**223**)

$$\int_{-a}^{a}\xi\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi = 0,$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi = 2\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi a^2}{2},$$

infolge dessen schliesslich

$$v = \frac{\pi a b \alpha\beta}{c}.$$

Das Resultat lässt eine bemerkenswerte Deutung zu, wenn man beachtet, dass πab die Fläche der Ellipse und $\frac{\alpha\beta}{c}$ die zu ihrem Mittelpunkte gehörige Applicate des hyperbolischen Paraboloids ist.

3) Der über der xy-Ebene, unter dem ersten Viertelgang der Wendelfläche

$$z = b \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

und innerhalb des Cylinders

$$x^2 + y^2 = R^2$$

befindliche Raum ist in rechtwinkligen Coordinaten durch

$$v = b\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy$$

ausgedrückt, die Integration in dieser Form aber unbequem ausführbar. Transformirt man dagegen in semipolare Coordinaten (**275**, 2)), so ergibt sich leicht

$$v = b\iint \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) r\,dr\,d\varphi = b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\,d\varphi\int_0^R r\,dr = \frac{\pi^2 b R^2}{16}$$

wie in **286**, 6).

4) Der Körper, welcher aus der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

durch den Cylinder

$$x^2 + y^2 = ax$$

ausgeschnitten wird, zerfällt durch die zx- und xy-Ebene in vier gleiche Theile; sein Volumen, in rechtwinkligen Coordinaten dargestellt, hat (Fig. 144) den Ausdruck

$$v = 4\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy.$$

Fig. 144.

Bequemer als in dieser Form wird die Ausrechnung in semipolaren Coordinaten, indem dann

$$v = 4\iint \sqrt{a^2 - r^2}\, r\,dr\,d\varphi,$$

ausgedehnt über den Halbkreis $OANO$. Integrirt man bei festem φ zuerst nach r, so sind 0 und $ON = a\cos\varphi$ die Grenzen; darnach ist in Bezug auf φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu integriren. Man hat daher

$$v = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\cdot r\,dr$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}_{a\cos\varphi}^{0} d\varphi = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Von der *Halbkugel*, welcher der Körper entnommen ist, verbleibt also als Rest ein Körper von dem rationalen Volumen $\frac{8}{9}a^3$.

288. *Beispiel* einer Cubatur durch ein dreifaches Integral. Es ist das Volumen des von den vier Ebenen

$$
\text{(A)} \qquad \begin{cases} E_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ E_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ E_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ E_4 \equiv a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}
$$

begrenzten Tetraeders zu berechnen.

Wollte man die Rechnung in rechtwinkligen Coordinaten durchführen, so müsste das Integrationsgebiet, durch den Umriss des Tetraeders auf der xy-Ebene begrenzt, in mehrere Theile zerlegt und die Grenzen von z, y, x für jeden besonders bestimmt werden.

Führt man hingegen neue Variable x_1, y_1, z_1 ein durch die Substitutionen

$$
\text{(B)} \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = x_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = y_1 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = z_1, \end{cases}
$$

so bedeutet dies eine Zerlegung des Raumes durch drei Systeme von Ebenen X_1, X_2, X_3 parallel zu E_1, E_2, E_3 in schiefparallelepipedische Elemente.

Um die nöthigen Rechnungen übersichtlich durchzuführen, seien die den Elementen von

$$
R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}
$$

adjungirten Unterdeterminanten mit den entsprechenden grossen Buchstaben und die Unterdeterminanten von

$$
D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

mit den griechischen Buchstaben bezeichnet. Dann folgt aus (B)

$$
x = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1}{D_4}
$$

$$
y = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1}{D_4}
$$

$$
z = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1}{D_4}
$$

und die Jacobi'sche Determinante der Substitution (B) ist

$$J = \frac{1}{D_4^{\,3}} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_4}.$$

Die Integration nach den neuen Variabeln geschieht zwischen *festen* Grenzen. Die Ebene X_1 hat nämlich, um den Raum des Tetraeders zu durchlaufen, aus der Lage E_1, d. i.

$$x_1 + d_1 = 0$$

sich in jene zu bewegen, in welcher sie durch den gemeinsamen Punkt der Ebenen E_2, E_3, E_4 hindurchgeht. In dieser letzten Lage aber hat sie die Gleichung

$$\lambda E_2 + \mu E_3 + \nu E_4 = 0,$$

wobei λ, μ, ν den Bedingungen

$$\begin{aligned} a_2\lambda + a_3\mu + a_4\nu &= a_1 \\ b_2\lambda + b_3\mu + b_4\nu &= b_1 \\ c_2\lambda + c_3\mu + c_4\nu &= c_1 \end{aligned}$$

zu entsprechen haben, welche aus der Forderung des Parallelismus mit E_1 entspringen. Aus diesen Bedingungen folgt dann

$$\lambda = -\frac{D_2}{D_1}, \qquad \mu = -\frac{D_3}{D_1}, \qquad \nu = -\frac{D_4}{D_1},$$

sodass der Endlage der Ebene die Gleichung

$$a_1x + b_1y + c_1z - \left(\frac{D_2}{D_1}d_2 + \frac{D_3}{D_1}d_3 + \frac{D_4}{D_1}d_4\right) = 0$$

oder

$$x_1 - \left(\frac{R}{D_1} - d_1\right) = 0$$

zukommt.

Die Grenzen von x_1 sind also $-d_1$, $\frac{R}{D_1} - d_1$; ebenso finden sich $-d_2$, $\frac{R}{D_2} - d_2$ als Grenzen von y_1 und $-d_3$, $\frac{R}{D_3} - d_3$ als Grenzen von z_1.

Das verlangte Volumen hat demnach, vom Vorzeichen abgesehen, den Ausdruck

$$v = \iiint \frac{1}{D_4}\,dx_1\,dy_1\,dz_1 = \frac{1}{D_4}\int\limits_{-d_1}^{\frac{R}{D_1}-d_1} dx_1 \int\limits_{-d_2}^{\frac{R}{D_2}-d_2} dy_1 \int\limits_{-d_3}^{\frac{R}{D_3}-d_3} dz_1 = \frac{R^3}{D_1D_2D_3D_4}.$$

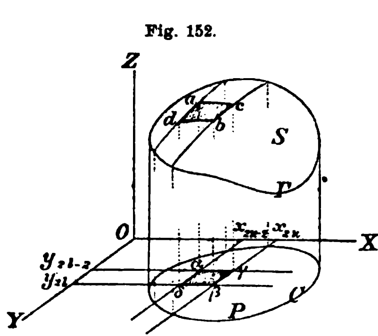
§ 4. Quadratur krummer Flächen.

289. Die allgemeinste Aufgabe, welche sich hier darbietet, besteht in Folgendem. *Von einer krummen Fläche*

(1) $$z = f(x, y)$$

ist der durch eine geschlossene Curve Γ, Fig. 152, begrenzte Theil S seiner Grösse nach zu bestimmen.

Fig. 152.



Aber es bedarf erst einer Erklärung, was unter der Grösse dieser Fläche, die wir auch mit S bezeichnen wollen, analytisch zu verstehen sei.

Zum Zwecke der Aufstellung dieser Definition projiciren wir S mit seiner Randcurve Γ auf die xy-Ebene und erhalten die Figur P mit dem Rande C. Nun theilen wir P durch zwei Systeme von Parallelen zu OY und OX in Elemente; ein solches Element $\alpha\gamma\beta\delta$ sei durch die Theilungslinien x_{2k-2}, x_{2k}; y_{2l-2}, y_{2l} bestimmt, seine Fläche ist

$$\Delta P = (x_{2k} - x_{2k-2})(y_{2l} - y_{2l-2}).$$

Zu einem beliebig innerhalb ΔP angenommenen Punkte x_{2k-1}/y_{2l-1} gehört ein Punkt auf der Fläche, und die Tangentialebene in diesem Punkte ist zur xy-Ebene unter einem Winkel (γ) geneigt, dessen Cosinus (**197**, (5))

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{f_x'(x_{2k-1}, y_{2l-1})^2 + f_y'(x_{2k-1}, y_{2l-1})^2 + 1}}$$

ist. Diese Tangentialebene schneidet aus dem über $\alpha\gamma\beta\delta$ errichteten, zur xy-Ebene senkrechten Prisma ein Parallelogramm aus, dessen Fläche

$$\frac{\Delta P}{\cos(\gamma)} = (x_{2k} - x_{2k-2})(y_{2l} - y_{2l-2}) \times \sqrt{f_x'(x_{2k+1}, y_{2l-1})^2 + f_y'(x_{2k-1}, y_{2l-1})^2 + 1}$$

gleichkommt. Die Doppelsumme dieser Parallelogramme

$$\sum\sum \frac{\Delta P}{\cos(\gamma)},$$

ausgedehnt über alle Elemente von P, convergirt aber zufolge des in **272** bewiesenen Satzes, wenn alle Differenzen $x_{2k}-x_{2k-2}$, $y_{2l}-y_{2l-2}$ gegen Null abnehmen, gegen eine von der Wahl der Punkte x_{2k-1}/y_{2l-1} unabhängige Grenze, nämlich gegen den Wert des Doppelintegrals

$$\iint_P \sqrt{f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2 + 1}\, dx\, dy.$$

Diese Grenze soll nun die *analytische Definition* für die Grösse von S bilden, so dass wir mit den üblichen Abkürzungen

$$f_x'(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad f_y'(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

die Grundformel erhalten

$$(2) \qquad S = \iint_P \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy.$$

Dieselbe kann durch Transformation der Variabeln andern Coordinatensystemen angepasst werden. Um dies gleich allgemein auszuführen, mögen an Stelle von x, y zwei neue Variable u, v durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

eingeführt werden; infolge von (1) wird auch z eine Function derselben werden

$$z = \chi(u, v).$$

Aus der letzten dieser Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v};$$

$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$ sind aus den beiden ersten Gleichungen zu entnehmen. Bedient man sich bei Auflösung dieser Gleichungen in Bezug auf p, q für die auftretenden Functionaldeterminanten der in **275** erwähnten Donkin'schen Bezeichnung, wornach z. B.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \text{ u. s. w.,}$$

so wird

$$p = -\frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

Da ferner die Jacobi'sche Determinante der Substitution (3)

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

ist, so lautet (2) nach vollzogener Transformation (**275**, (24))

$$(4) \qquad S = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2}\, du\, dv.$$

Zuerst werde diese allgemeine Formel auf den Fall semipolarer Coordinaten angewendet; hier sind

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

und r, φ die neuen Variabeln; die drei Determinanten haben die Werte

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi & \frac{\partial z}{\partial r} \\ r\cos\varphi & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = -r\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\sin\varphi$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \cos\varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = -r\frac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

ihre Quadratsumme ist

$$r^2 + \left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2;$$

daher gilt in diesem Falle die Formel

$$(5) \qquad S = \iint \sqrt{r^2 + \left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, dr\, d\varphi.$$

An zweiter Stelle nehmen wir an, die Fläche sei auf räumliche Polarcoordinaten bezogen und habe die Gleichung

$$(6) \qquad r = f(\theta, \varphi);$$

dann sind

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

infolge von (6) ebenso wie r Functionen von θ und φ; die drei Functionaldeterminanten lauten jetzt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta \sin\varphi, & \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \sin\varphi + r \sin\theta \cos\varphi, & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos\theta \end{vmatrix}$$
$$= - r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi + r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\varphi + r^2 \sin^2\theta \cos\varphi,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta, & \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta \cos\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos\theta, & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \cos\varphi - r \sin\theta \sin\varphi \end{vmatrix}$$
$$= - r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi - r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin\varphi,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta \cos\varphi, & \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta \sin\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \cos\varphi - r \sin\theta \sin\varphi, & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \sin\varphi + r \sin\theta \cos\varphi \end{vmatrix}$$
$$= r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin^2\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta;$$

ihre Quadratsumme ist

$$r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 \sin^2\theta + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^4 \sin^2\theta.$$

Infolge dessen gilt für räumliche Polarcoordinaten die Formel

$$(7) \qquad S = \iint \sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right] \sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\, r\, d\theta\, d\varphi.$$

Für eine *sphärische Figur* vereinfacht sie sich wesentlich; wenn nämlich $r = a$ constant ist, so wird

$$(8) \qquad S = a^2 \iint \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

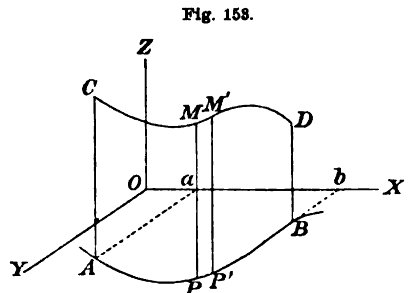
wie auch leicht direct gezeigt werden könnte.

290. Die Formel (2) verliert, wie aus dem Gange ihrer Ableitung hervorgeht, Geltung bei einer *zur z-Axe parallelen*

Cylinderfläche. Handelt es sich um die Quadratur des Stückes $ABDC$ der Cylinderfläche

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{9}$$

Fig. 153, das begrenzt ist von dem Bogen AB der Leitcurve, den Mantellinien AC, BD und der Curve CD, längs welcher (9) durch die Fläche



$$\psi(x, y, z) = 0 \tag{10}$$

geschnitten wird, so denke man sich den Cylinder in eine Ebene abgewickelt; dann liegt die Grundaufgabe der Quadratur ebener Curven vor mit dem Unterschiede, dass an die Stelle der Abscisse der Bogen von AB tritt; hiernach ist

$$S = \int_{x=a}^{x=b} z\,ds, \tag{11}$$

darin bedeutet z jene Function von x, welche sich aus (9) und (10) durch Elimination von y ergibt.

Einen weiteren wichtigen Fall, wo die Quadratur mittels einer einfachen Integration bewerkstelligt werden kann, bieten die *Rotationsflächen* dar, wenn es sich um die Bestimmung einer von zwei Parallelkreisen begrenzten Zone handelt.

Ordnet man das Coordinatensystem derart an, dass die Rotationsaxe mit der z-Axe zusammenfällt, so hat die Fläche eine Gleichung der Form (**185**, 2))

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}); \tag{12}$$

hieraus folgt

$$p = f'(\sqrt{x^2 + y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad q = f'(\sqrt{x^2 + y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

und die Eintragung dieser Werte in (2) gibt

$$S = \iint \sqrt{1 + f'(\sqrt{x^2 + y^2})^2}\, dx\,dy;$$

führt man semipolare Coordinaten ein, so geht dies über in

$$S = \int\int \sqrt{1 + f'(r)^2} \cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Soll nun eine von zwei Parallelkreisen begrenzte Zone quadrirt werden, so sind die Grenzen von r feste Zahlen — die Radien jener Parallelkreise, — die von φ aber 0 und 2π; letztere Integration kann also unmittelbar ausgeführt werden und man erhält

$$S = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + f'(r)^2}\, r\,dr;$$

da nunmehr das übrige Integral von φ nicht abhängt, so kann man darin $\varphi = 0$ setzen, wodurch $r = x$ wird, und findet so als endgiltige Formel für die von dem Bogen $M_0 M_1$ des Meridians, Fig. 154, beschriebene Zone

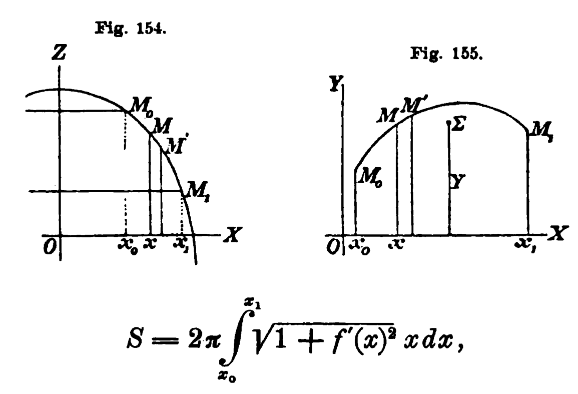


Fig. 154. Fig. 155.

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, x\,dx,$$

oder, weil $\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ das Bogendifferential ds des Meridians ist,

$$S = 2\pi \int_{x = x_0}^{x = x_1} x\,ds. \tag{13}$$

Dementsprechend beschreibt der Bogen $M_0 M_1$ der um die x-*Axe* rotirenden Curve $y = f(x)$, Fig. 155, eine Zone von der Grösse

$$S = 2\pi \int_{x = x_0}^{x = x_1} y\,ds. \tag{14}$$

Die Ausdrücke $2\pi x ds$, $2\pi y ds$ bedeuten bis auf Grössen höherer als der ersten Ordnung die von dem Bogenelemente MM' im ersten und zweiten Falle beschriebenen Elementarzonen.

Die beiden behandelten Fälle sind nicht die einzigen, wo zur Quadrirung einer krummen Fläche *eine* Integration ausreicht; dies tritt immer ein, wenn sich die Fläche in Elemente zerlegen lässt, deren analytischer Ausdruck von der ersten Kleinheitsordnung ist.

Anmerkung. Das Integral $\int_{x_0}^{x_1} y\,ds$ in (14) hat die Bedeutung des statischen Momentes des Bogens M_0M_1 bezüglich der x-Axe, kommt also auch gleich dem Producte Ys aus der Ordinate Y des Schwerpunktes Σ dieses Bogens und der Länge s desselben. Man hat demnach auch

$$S = 2\pi Y s. \tag{15}$$

Darin spricht sich ein Analogon der Guldin'schen Regel (**286**, 4)) aus; *es ist nämlich die von dem Bogen s beschriebene Zone dem Mantel eines geraden Cylinders vom Basisumfange s und der Höhe $2\pi Y$ gleich, welch' letztere dem vom Schwerpunkte des Bogens beschriebenen Kreise gleichkommt.*

291. *Beispiele* von Quadraturen mittels einfacher Integrale.

1) *Quadratur des Rotationsparaboloids.* Rotirt die Parabel

$$y^2 = 2px$$

um die x-Axe, so beschreibt der im Scheitel beginnende und bei dem Punkte mit der Abscisse x schliessende Bogen eine Calotte von der Grösse (14)

$$S = 2\pi \int_0^x y\sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^x \sqrt{2px + p^2}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{3p}\left[(2px + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right].$$

2) *Quadratur der Rotationsellipsoide.* Die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$$

beschreibt bei der Drehung um die x-Axe ein *oblonges*, bei der Drehung um die y-Axe ein *abgeplattetes* Ellipsoid; es sollen ihre Gesammtoberflächen bestimmt werden.

Dem Bogendifferentiale der Ellipse kann man die beiden Formen

$$ds = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{a^2y}\,dx, \qquad ds = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{b^2x}\,dy$$

verleihen, jenachdem x oder y als unabhängige Variable gelten soll.

α) Die Oberfläche des oblongen Ellipsoids ist

$$S = 2\pi\int\limits_{x=-a}^{x=a} y\,ds = \frac{2\pi}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}\,dx$$

oder, wenn man y mittels der Ellipsengleichung als Function von x darstellt und die relative Excentricität $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ einführt,

$$S = \frac{4\pi b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}\,dx;$$

mittels der Substitution $\varepsilon x = au$ ergibt sich schliesslich (**222**, 2))

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} S = \dfrac{4\pi ab}{\varepsilon}\displaystyle\int\limits_0^{\varepsilon}\sqrt{1 - u^2}\,du \\ \quad = 2\pi ab\left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right]. \end{cases}$$

β) Die Oberfläche des abgeplatteten Ellipsoids ist

$$S = 2\pi\int\limits_{y=-b}^{y=b} x\,ds = \frac{2\pi}{b^2}\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}\,dy;$$

drückt man x durch y aus und benützt wieder die relative Excentricität, so kommt zunächst

$$S = \frac{4\pi a}{b^2}\int\limits_0^b \sqrt{a^2\varepsilon^2y^2 + b^4}\,dy$$

und mittels der Substitution $a\varepsilon y = b^2u$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} S = \dfrac{4\pi b^2}{\varepsilon}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{a\varepsilon}{b}}\sqrt{1 + u^2}\,du \\ \quad = 2\pi a^2\left[1 + \dfrac{b^2}{a^2\varepsilon}\,l.\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right]. \end{cases}$$

Bei dem Grenzübergange $\lim b = a$, $\lim \varepsilon = 0$ liefern die Formeln (A), (B) das nämliche Resultat, nämlich die Oberfläche einer Kugel vom Radius a, $= 4\pi a^2$.

3) Quadratur der durch Rotation eines Astes der *Cykloide*

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

beschriebenen Fläche.

Weil $ds = 2a \sin\frac{u}{2}\, du$ und $y = 2a \sin^2\frac{u}{2}$, so ist

$$S = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{u}{2}\, du = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 \omega\, d\omega = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Aus der bekannten Länge $s = 8a$ (**284**, 2)) ergibt sich mit Benützung der Formel (15) die Ordinate des Schwerpunktes eines Curvenastes

$$Y = \frac{\frac{64}{3}\pi a^2}{2\pi \cdot 8a} = \frac{4}{3}a.$$

4) Einen durch den Cylinder

$$x^2 + y^2 = R^2$$

begrenzten Gang der *Wendelfläche*

$$z = b \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

zu quadriren.

Mit Hilfe von $p = -\frac{by}{x^2 + y^2}$, $q = \frac{bx}{x^2 + y^2}$ findet man den Cosinus des Neigungswinkels der Tangentialebene gegen die xy-Ebene

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2 + y^2}}}$$

und erkennt daraus, dass er nur abhängt von dem Abstande $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ des Punktes von der z-Axe. Schneidet man also die Wendelfläche durch zwei coaxiale Cylinder von den Radien r und $r + dr$, so ist der ausgeschnittene bandförmige Streifen, der sich in der xy-Ebene in einen Kreisring von der Fläche $2\pi r dr$ projicirt, gleich

$$\frac{2\pi r\, dr}{\cos\gamma} = 2\pi\sqrt{b^2 + r^2}\, dr;$$

daraus folgt die Oberfläche des ganzen Ganges

$$S = 2\pi \int_0^R \sqrt{b^2 + r^2}\, dr = 2\pi b^2 \int_0^{\frac{R}{b}} \sqrt{1 + u^2}\, du$$

$$= \pi b^2 \left[\frac{R}{b}\sqrt{1 + \frac{R^2}{b^2}} + l.\left(\frac{R}{b} + \sqrt{1 + \frac{R^2}{b^2}}\right)\right].$$

5) *Quadratur der Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids*

(A) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c).$$

Aus der expliciten Darstellung von z ergeben sich die Differentialquotienten

$$p = -\frac{c\frac{x}{a}}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}, \quad q = -\frac{c\frac{y}{b}}{b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

und hiermit

$$\cos^2\gamma = \frac{a^2b^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}{b^2c^2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + a^2c^2\left(\frac{y}{b}\right)^2 + a^2b^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}.$$

Der geometrische Ort solcher Punkte des Ellipsoids, in welchen die Tangentialebene gegen die xy-Ebene unter dem Winkel γ geneigt ist, projicirt sich auf die xy-Ebene in eine Curve, welche durch die letztgeschriebene Gleichung dargestellt ist, wenn man darin γ als constant auffasst; geordnet lautet diese Gleichung

(B) $$\left\{\begin{aligned}&\left[1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\cos^2\gamma\right]\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left[1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2}\cos^2\gamma\right]\left(\frac{y}{b}\right)^2 \\ &\qquad = \sin^2\gamma,\end{aligned}\right.$$

gehört somit einer Ellipse an, deren Halbaxen

$$\frac{a\sin\gamma}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\cos^2\gamma}}, \qquad \frac{b\sin\gamma}{\sqrt{1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2}\cos^2\gamma}}$$

sind und deren Fläche gleichkommt

(C) $$u = \frac{\pi ab\sin^2\gamma}{\sqrt{(1 - \alpha^2\cos^2\gamma)(1 - \beta^2\cos^2\gamma)}},$$

wenn man sich der Abkürzungen

$$\text{(D)}\qquad \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\alpha,\qquad \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b}=\beta$$

bedient.

Durch eine Folge von Ellipsen (B) mit wechselndem γ wird das Integrationsgebiet $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ in elliptische Ringe zerlegt, und diesen entsprechen auf dem Ellipsoid bandförmige Streifen, deren allgemeiner Ausdruck

$$\frac{du}{\cos\gamma}$$

ist. Da γ, vom Punkte $0/0/c$ anfangend bis zur xy-Ebene, das Intervall $0, \frac{\pi}{2}$ durchläuft, so ist

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\cos\gamma}.$$

Theilweise Ausführung der Integration gibt

$$\frac{S}{2}=\left[\frac{u}{\cos\gamma}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\,d\gamma;$$

setzt man für u den Wert aus (C) ein und transformirt das Integral durch die Substitution

$$\alpha\cos\gamma=\sin\varphi,$$

setzt

$$\frac{\beta}{\alpha}=k,$$

das zufolge (D) ein echter Bruch ist, so wird

$$\frac{S}{2}=\left[\frac{\pi ab(\alpha^2-\sin^2\varphi)}{\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]_{\arcsin\alpha}^{0}$$
$$+\frac{\pi ab}{\alpha}\int_{\arcsin\alpha}^{0}\frac{(\alpha^2-\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Formt man nun das Integral, das für sich allein weiter ausgeführt werden soll, durch die Identität

$$\alpha^2-\sin^2\varphi=\alpha^2(1-k^2\sin^2\varphi)+(\alpha^2k^2-1)\sin^2\varphi$$

um, so kommt es, von den Grenzen abgesehen, gleich der Summe

$$\alpha^2 \int \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} d\varphi + (\alpha^2 k^2 - 1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

und wenn in dem ersten Theile partielle Integration zur Anwendung gebracht wird mit der Zerlegung $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, $\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$, so hat man weiter

$$- \alpha^2 \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$- \alpha^2 \int \frac{k^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + (\alpha^2 k^2 - 1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

das erste der beiden Integrale zerfällt weiter durch die Umformung

$$k^2 \cos^2 \varphi = k^2 - 1 + 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

und der ganze Ausdruck verwandelt sich in

$$- \alpha^2 \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - (\alpha^2 k^2 - \alpha^2) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$- \alpha^2 \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi + (\alpha^2 k^2 - 1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= - \alpha^2 \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$+ (\alpha^2 - 1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha^2 \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für $\frac{S}{2}$ ein, so wird

$$\frac{S}{2} = \pi ab \left\{ \left[\frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi}{\alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right]_{\arcsin \alpha}^{0} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \int_0^{\arcsin \alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \alpha \int_0^{\arcsin \alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \right\};$$

der vom Integralzeichen freie Ausdruck nimmt an der oberen Grenze die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an, sein Grenzwert für $\lim \varphi = 0$ ist aber $\alpha \lim\limits_{\varphi = 0} \frac{1}{\sin \varphi} - \alpha \lim\limits_{\varphi = 0} \frac{1}{\sin \varphi} = 0$. Demnach ist endgiltig

$$\text{(E)} \left\{ \begin{aligned} & S = 2\pi ab \Big[\sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)} \\ & + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \int_0^{\arcsin \alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \alpha \int_0^{\arcsin \alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \Big]. \end{aligned} \right.$$

Die Oberfläche des allgemeinen Ellipsoids drückt sich also durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung aus. Es ist leicht zu erweisen, dass die Formel (E) für $b = c$, $a = b$ in die Formeln (A), resp. (B) von Beispiel 2) übergeht.

292. *Beispiele* von Quadraturen mittels doppelter Integrale.

1) Den Mantel eines geraden elliptischen Kegels mit den Basishalbaxen a, b und der Höhe c zu quadriren.

Verlegt man die Spitze in den Ursprung, die Höhe in die (positive) z-Axe, so hat die Kegelfläche die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0$$

und ist das Integrationsgebiet durch die Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

begrenzt. Aus der expliciten Darstellung von z erhält man

$$p = \frac{c\,\frac{x}{a}}{a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}, \qquad q = \frac{c\,\frac{y}{b}}{b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

und hiermit

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \sqrt{\frac{\frac{a^2 + c^2}{a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{b^2 + c^2}{b^2}\left(\frac{y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

so dass sich mit den Abkürzungen

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} = \alpha, \qquad \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b} = \beta$$

ergibt

$$S = \iint \sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}\, dx\, dy,$$

die Integration ausgedehnt über die erwähnte Ellipse. Diese aber verwandelt sich durch die projective Transformation

$$\frac{x}{a} = x_1, \qquad \frac{y}{b} = y_1$$

in den Kreis

$$x_1^2 + y_1^2 = 1$$

und das Integral in

$$S = ab \iint \sqrt{\frac{(\alpha x_1)^2 + (\beta y_1)^2}{x_1^2 + y_1^2}}\, dx_1\, dy_1$$

ausgedehnt über eben diesen Kreis. Einführung semipolarer Coordinaten gibt endlich

$$S = ab \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 ab \cos^2 \varphi + \beta^2 ab \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Nach (**284**, 4), (A) stellt das Integral für sich den Umfang einer Ellipse mit den Halbaxen $\alpha\sqrt{ab}$, $\beta\sqrt{ab}$ dar, und es hat sonach ein gerader Cylinder mit *dieser* Ellipse als Basis und der Höhe $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ denselben Mantel wie der Kegel.

Die vorliegende Aufgabe führt also auf ein elliptisches Integral zweiter Gattung.

2) Von dem Körper, welchen der Cylinder

$$x^2 + y^2 = ax$$

aus der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

ausschneidet (**284**, 6), Fig. 144), die in die Kugeloberfläche fallenden Flächentheile und die ganze Oberfläche zu quadriren.

Die Beibehaltung rechtwinkliger Coordinaten erweist sich hier alsbald als unzweckmässig. In semipolaren Coordinaten lauten die beiden Gleichungen

$$r = a \cos \varphi$$

$$z = \sqrt{a^2 - r^2};$$

in Ausführung der Formel **290**, (5) hat man also

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

und für den vierten Theil der auf der Kugel liegenden Flächentheile

$$\frac{S}{4} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)\,d\varphi = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

sodass

$$S = 2a^2(\pi - 2).$$

Um ferner den cylindrischen Theil der Begrenzungsfläche zu berechnen, hat man sich der Formel **290**, (11) zu bedienen; dabei ist ds das Bogendifferential des Kreises

$$r = a\cos\varphi,$$

also $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = a\,d\varphi$, ferner z derjenige Wert, welcher aus der Verbindung der beiden Gleichungen

$$r = a\cos\varphi, \qquad z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

hervorgeht, d. i. $z = a\sin\varphi$. Der vierte Theil dieses Mantels ist sonach

$$\frac{M}{4} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi = a^2$$

und

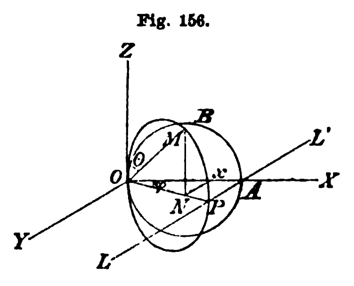
$$M = 4a^2.$$

Demnach ist schliesslich die gesammte Oberfläche des Körpers

$$O = S + M = 2\pi a^2,$$

gleich der halben Oberfläche der Kugel.

Fig. 156.



3) In der xy-Ebene eines räumlichen Coordinatensystems ist eine zu OY parallele Gerade LL', Fig. 156, im Abstande $OA = a$ gegeben; die aus O nach dieser Geraden gezogenen Strahlen OP bilden die Durchmesser von Kreisen, deren Ebenen durch OZ gehen. Von der Ortsfläche dieser Kreise ist jener Theil zu quadriren, der zwischen dem kleinsten Kreise OBA und dem Kreise OMP liegt.

Um die Gleichung der Fläche zu finden, beachte man, dass

$$ON^2 + NM^2 = ON \cdot OP;$$

aus $\frac{OP}{ON} = \frac{a}{x}$ folgt aber $OP = \frac{a}{x}\,ON$, folglich ist weiter

$$ON^2 + NM^2 = \frac{a}{x} ON^2$$

und dies gibt unmittelbar die gesuchte Gleichung:

$$(x^2 + y^2 + z^2)x = a(x^2 + y^2).$$

Die Quadratur aber gestaltet sich am einfachsten in räumlichen Polarcoordinaten; in diesen heisst die Gleichung der Fläche

$$r = \frac{a \sin \theta}{\cos \varphi}.$$

In Anwendung der Formel 290, (7) hat man

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{a \cos \theta}{\cos \varphi}, \qquad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{a \sin \theta \sin \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \varphi};$$

folglich ist

$$S = a^2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi a^2}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi};$$

das noch erübrigende Integral gibt bei partieller Integration

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} - \int \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} - \int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

sodass (251)

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 \cos \varphi} + \frac{1}{2} l. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right);$$

mithin hat man schliesslich

$$S = \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + l. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

§ 5. Massenanziehung und Potential.

293. Zwischen zwei mit den Massen m, μ begabten Punkten ist nach dem Newton'schen Attractionsgesetze eine in ihrer Verbindungslinie wirksame gegenseitige Anziehung

thätig, welche den Massen direct, dem Quadrate ihrer Entfernung r umgekehrt proportional ist, also den Ausdruck

$$k\frac{m\mu}{r^2}$$

hat. Die *Attractionsconstante* k bedeutet die zwischen zwei Masseneinheiten in der Entfernungseinheit wirkende Anziehung. Der einfacheren Darstellung wegen wählen wir die Masseneinheit so, dass das Product $k\mu = 1$ ist; die Wirkung von m auf μ drückt sich dann durch

$$\frac{m}{r^2}$$

aus.

Um die Wirkung eines Systems von Punkten $M_1, M_2, \ldots$ mit den Massen $m_1, m_2, \ldots$ auf einen von ihnen *verschiedenen* Punkt P — den *Aufpunkt* — mit der Masse μ zu bestimmen, wird man nach den Methoden der Mechanik folgenden Weg einschlagen. Nachdem man ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt, bezüglich dessen die Punkte M_i, P die Coordinaten

$$\xi_i/\eta_i/\zeta_i; \qquad x/y/z$$

haben mögen, sodass ihre (absolute) Entfernung

$$(1) \qquad r_i = \sqrt{(\xi_i - x)^2 + (\eta_i - y)^2 + (\zeta_i - z)^2}$$

ist, zerlege man jede Einzelanziehung in drei zu den Coordinatenaxen parallele Componenten; diese sind für das Punktepaar M_i, P

$$\frac{m_i}{r_i^2}\frac{\xi_i - x}{r_i}, \qquad \frac{m_i}{r_i^2}\frac{\eta_i - y}{r_i}, \qquad \frac{m_i}{r_i^2}\frac{\zeta_i - z}{r_i}.$$

Durch Summirung über alle Werte des Zeigers i ergeben sich daraus die Componenten der Gesammtanziehung

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \sum \dfrac{m_i(\xi_i - x)}{r_i^3} \\ Y = \sum \dfrac{m_i(\eta_i - y)}{r_i^3} \\ Z = \sum \dfrac{m_i(\zeta_i - z)}{r_i^3}; \end{cases}$$

die Gesammtanziehung selbst ist der Grösse nach durch

(3) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und der Richtung nach durch

(4) $$\cos(R, X) = \frac{X}{R}, \quad \cos(R, Y) = \frac{Y}{R}, \quad \cos(R, Z) = \frac{Z}{R}$$

bestimmt.

Es ist nun für die Theorie der Anziehung grundlegend geworden, was Lagrange zuerst bemerkt hat, *dass nämlich die drei Componenten X, Y, Z sich als partielle Differentialquotienten einer und derselben Summe in Bezug auf die Coordinaten des Aufpunktes darstellen lassen;* diese Summe ist

(5) $$V = \sum \frac{m_i}{r_i}.$$

Denn in der That ist mit Rücksicht auf (1)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\sum \frac{m_i}{r_i^2}\frac{\partial r_i}{\partial x} = \sum \frac{m_i(\xi_i - x)}{r_i^3} = X \text{ u. s. w.}$$

Die Summe V, als Function von x, y, z aufgefasst, nennt man nach Gauss' Vorschlage das *Potential* *) des Systems M_i in Bezug auf P.

Liegt an Stelle eines Systems discreter Massenpunkte ein stetig mit Masse erfüllter Raum, ein materieller Körper vor, so führt man dies auf den früheren Fall wie folgt zurück. Der Raum wird auf passende Art in Elemente zerlegt; innerhalb eines solchen, $\varDelta v$, wird ein Punkt $\xi/\eta/\zeta$ angenommen, dessen Entfernung von P mit r bezeichnet sei; die Dichte an diesem Punkte **), eine Function von ξ, η, ζ, heisse ϱ. Die nach Vorschrift von (2) und (5) gebildeten dreifachen Summen

$$\sum \frac{\varrho\,\varDelta v(\xi - x)}{r^3}, \quad \sum \frac{\varrho\,\varDelta v(\eta - y)}{r^3}, \quad \sum \frac{\varrho\,\varDelta v(\zeta - z)}{r^3}; \quad \sum \frac{\varrho\,\varDelta v}{r}$$

convergiren bei Abnahme aller $\varDelta v$ gegen Null und unter der Voraussetzung, dass P ausserhalb der Masse liegt, gegen be-

---

*) Green gebraucht dafür den Namen Potentialfunction; Hamilton nennt sie Kräftefunction.

**) Als Grenzwert des Quotienten der ihn umgebenden Masse durch ihr Volumen bei Abnahme des letzteren gegen Null.

stimmte Grenzen, und diese repräsentiren der Reihe nach $X, Y, Z; V$; man hat also

$$(6)\qquad \begin{cases} X = \iiint \frac{\varrho\, dv(\xi - x)}{r^3}, \\ Y = \iiint \frac{\varrho\, dv(\eta - y)}{r^3}, \\ Z = \iiint \frac{\varrho\, dv(\zeta - z)}{r^3}; \end{cases}$$

$$(7)\qquad V = \iiint \frac{\varrho\, dv}{r}$$

die Integrationen über den von der Masse erfüllten Raum ausgedehnt.

Unter Umständen können $X, Y, Z; V$ auch durch zweifache oder selbst durch einfache Integrale ausgedrückt werden, wenn Form und Vertheilung der Masse die Bildung von Elementen zweiter oder erster Kleinheitsordnung gestatten, innerhalb deren r und ϱ bis auf unendlich kleine Grössen als constant angesehen werden dürfen.

Auch jetzt besteht zwischen V und den Componenten die Beziehung, dass $\frac{\partial V}{\partial x} = X$, u. s. w., weil unter den gemachten Voraussetzungen die Differentiation von V unter dem Integralzeichen vollzogen werden kann, wobei r der einzige variable Bestandtheil ist.

294. Aus den Definitionen (6) und (7) von $X, Y, Z; V$ geht unmittelbar hervor, dass es *eindeutige* Functionen von x, y, z sind, die in jedem Punkte ausserhalb der Masse einen bestimmten endlichen Wert haben.

Weil X, Y, Z die Ableitungen von V sind, so hat dieses Verhalten zur Folge, *dass V, zunächst im äussern Raume, überall stetig verläuft.*

Um über das Verhalten von X, Y, Z selbst urtheilen zu können, ist die Kenntnis der zweiten Ableitungen von V erforderlich. So lange P ausserhalb liegt, darf $\frac{\partial X}{\partial x}$ aus X durch Differentiation unter dem Integralzeichen abgeleitet werden; man findet so

$$
(8) \quad \begin{cases}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x} = \iiint \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} \right] \varrho \, dv \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \iiint \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(\eta - y)^2}{r^5} \right] \varrho \, dv \\
\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial Z}{\partial z} = \iiint \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5} \right] \varrho \, dv.
\end{cases}
$$

Auch die zweiten Differentialquotienten*) haben für jeden äussern Punkt bestimmte endliche Werte, woraus folgt, *dass auch X, Y, Z, im äussern Raume zunächst, stetig verlaufen.*

Eine wichtige Frage geht dahin, in welcher Weise sich V und seine ersten Ableitungen, also die Anziehungscomponenten ändern, wenn der Aufpunkt sich von der anziehenden Masse immer weiter entfernt. Um sie zu erledigen, wählen wir in der Masse einen festen Punkt, bezeichnen seine Entfernung von P mit D und führen nun folgende Grenzübergänge durch.

Es ist

$$
DV = \iiint \frac{D}{r} \varrho \, dv;
$$

für $\lim D = \infty$ wird jedes $\lim \frac{D}{r} = 1$, also

$$
\lim_{D=\infty} DV = \iiint \varrho \, dv;
$$

$\varrho \, dv$ aber ist das Massenelement, mithin stellt das Integral die anziehende Masse M vor, sodass

$$
(9) \qquad \lim_{D=\infty} DV = M,
$$

woraus $\lim\limits_{D=\infty} V = 0$ sich ergibt.

Ferner ist

$$
D^2 X = \iiint \left(\frac{D}{r}\right)^2 \frac{\xi - x}{r} \varrho \, dv;
$$

wie früher wird für $\lim D = \infty$ jedes $\lim \frac{D}{r} = 1$; und wenn P schliesslich in einer festen Richtung sich fortbewegt, die mit OX den Winkel α einschliesst, wird $\lim \frac{\xi - x}{r} = \cos \alpha$; daher

*) Ausser den angeschriebenen auch $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}$ u. s. w.

(10) $$\lim_{D=\infty} D^2 X = \iiint \cos\alpha \cdot \varrho\, dv = M \cos\alpha,$$

folglich $\lim\limits_{D=\infty} X = 0$.

Aus den Gleichungen (9) und (10) ergibt sich also die Thatsache, *dass Potential und Attractionscomponenten im Unendlichen unendlich klein werden, jenes von der ersten, diese von der zweiten Ordnung in Bezug auf* $\frac{1}{D}$.

Addirt man die Gleichungen (8) unter Rücksichtnahme darauf, dass alle Integrale sich über dasselbe Gebiet erstrecken und $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r^2$ ist, so kommt man zu der Gleichung

(11) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

welche eine zuerst von Laplace bemerkte Eigenschaft des Potentials *im äussern Raume* ausdrückt und *Laplace'sche Gleichung* genannt wird. Sie ist nicht blos für das Gesetz der Massenanziehung, sondern auch für andere Naturerscheinungen, wie für die Temperaturvertheilung in einem Körper ohne Wärmequellen im stationären Zustande, für die Vertheilung stationärer galvanischer Ströme in einem körperlichen Leiter charakteristisch.

295. Wenn der Aufpunkt P *innerhalb* oder an der Oberfläche der anziehenden Masse liegt, so werden die Integrale, welche V und seine Differentialquotienten definiren, uneigentliche Integrale (**258**), indem die Function unter dem Integralzeichen unendlich wird; r wird nämlich Null in dem Punkte P, der jetzt dem Integrationsgebiete angehört.

Es wird nun Sache einer besonderen Untersuchung sein, ob die Integrale trotzdem bestimmte Werte haben. Aber auch dann, wenn dies der Fall sein sollte, bleibt noch zu bedenken, dass die Integrale **293**, (6) aus (7) durch Differentiation unter dem Integralzeichen hervorgegangen sind, durch einen Process, der bei einem uneigentlichen Integrale nicht ohneweiters statthaft ist.

Zunächst lässt sich durch eine Transformation der Variabeln zeigen, dass die Integrale in (7) und (6) auch für einen

innern Aufpunkt bestimmte Werte behalten, indem sie in eigentliche Integrale übergehen; dagegen bleiben die Integrale (8) auch nach dieser Transformation uneigentlich. Geht man nämlich von dem gegebenen Coordinatensysteme zu einem parallelen mit dem Ursprunge P über, so sind ξ, η, ζ durch $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ zu ersetzen, während $dv = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ in das Parallelepiped $dx_1\, dy_1\, dz_1$ der neuen Coordinaten sich verwandelt; und transformirt man nun zu Polarcoordinaten, so ist

$$\xi - x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$\eta - y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$\zeta - z = r \cos\theta$$

zu setzen, während das neue Raumelement, das an Stelle von dv tritt (**278**, 2)), den Ausdruck $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ erhält. Demnach wird

$$V = \iiint \varrho r \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \tag{12}$$

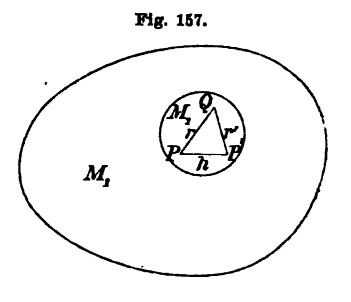
und die Integrale für X, Y, Z gehen über in

$$\left\{\begin{array}{l} \iiint \varrho \sin^2\theta \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \\ \iiint \varrho \sin^2\theta \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \\ \iiint \varrho \sin\theta \cos\theta\; dr\, d\theta\, d\varphi; \end{array}\right. \tag{13}$$

das aber sind durchwegs Integrale von bestimmtem endlichen Werte.

Um nun zu zeigen, dass auch bei einem innern Punkte die Integrale (6) oder die ihnen äquivalenten (13) die Ableitungen von V repräsentiren, schlagen wir folgendes Verfahren ein. Die ganze, einfach zusammenhängend gedachte Masse M, Fig. 157, werde in zwei Theile M_1, M_2 zerlegt, deren zweiter den Aufpunkt P allseitig umgibt; sind V, V_1, V_2 die Potentiale von M, M_1, M_2 beziehungsweise, so gilt

Fig. 157.



$$V = V_1 + V_2;$$

bei Verschiebung von P parallel zur x-Axe nach P' innerhalb M_2 um den Betrag h mögen V, V_1, V_2 der Reihe nach übergehen in V', V_1', V_2', so ist wieder

$$V' = V_1' + V_2'.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{V' - V}{h} = \frac{V_1' - V_1}{h} + \frac{V_2' - V_2}{h}$$

und für $\lim h = 0$ auch

$$\lim \frac{V' - V}{h} = \lim \frac{V_1' - V_1}{h} + \lim \frac{V_2' - V_2}{h}.$$

Der erste Grenzwert rechts ist, wie klein auch M_2 sein mag, durch das Integral

$$\iiint \frac{\varrho\, dv (\xi - x)}{r^3},$$

ausgedehnt über M_1, gegeben, da P ausser M_1 liegt.

Es handelt sich also um den zweiten. Aus

$$V_2 = \iiint \frac{\varrho\, dv}{r}$$

$$V_2' = \iiint \frac{\varrho\, dv}{r'}$$

folgt

$$V_2' - V_2 = \iiint\limits_{(M_2)} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) \varrho\, dv;$$

nun ist

$$\left| \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right| = \frac{|r - r'|}{rr'} < \frac{|h|}{rr'},$$

weil die Differenz zweier Dreiecksseiten kleiner ist als die dritte; ferner schliesst man aus

$$\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2}{rr'} > 0,$$

dass

$$\frac{1}{rr'} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right);$$

daher ist schliesslich

$$\left| \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right| < \frac{|h|}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right)$$

und

$$\left| \frac{V_2' - V_2}{h} \right| < \frac{1}{2} \iiint\limits_{(M_2)} \frac{\varrho\, dv}{r^2} + \frac{1}{2} \iiint\limits_{(M_2)} \frac{\varrho\, dv}{r'^2}.$$

Bezeichnet ϱ_0 die grösste Dichte in M_2, r_0 die grösste Entfernung von P zur Oberfläche von M_2, so erkennt man durch Einführung von Polarcoordinaten, dass der erste Theil rechts

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{(M_2)} \varrho \sin\theta \, dr d\theta \, d\varphi < \frac{\varrho_0 r_0}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 2\pi\varrho_0 r_0$$

und ebenso der zweite Theil

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{(M_2)} \varrho \sin\theta \, dr' d\theta \, d\varphi < \frac{\varrho_0 r_0'}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 2\pi\varrho_0 r_0',$$

wenn r_0' die grösste Entfernung von P' zur Oberfläche von M_2 ist.

Also ist schliesslich

$$\left| \frac{V_2' - V_2}{h} \right| < 2\pi\varrho_0(r_0 + r_0')$$

und kann durch Zusammenziehung von M_2 unter gleichzeitiger Annäherung von P' an P beliebig klein gemacht werden.

Da hiernach der Unterschied zwischen $\lim \frac{V' - V}{h}$ und $\lim \frac{V_1' - V_1}{h}$ beliebig verringert werden kann, so ist $\frac{\partial V}{\partial x}$ auch für einen innern Punkt durch das Integral (6) dargestellt.

Daraus, dass die Ableitungen von V auch innerhalb der Masse überall bestimmte Werte haben, folgt, dass V auch dort eine stetige Function ist. *Das Potential ist also im ganzen Raume stetig.*

Aber auch die Stetigkeit der Ableitungen X, Y, Z von V innerhalb der attrahirenden Masse kann erwiesen werden und zwar in folgender Weise.

Macht man von derselben Zerlegung des M Gebrauch wie vorhin, so folgt aus

$$V = V_1 + V_2$$

auch

$$X = X_1 + X_2,$$

wobei nach (13) X_2 ersetzt werden kann durch

$$\iiint\limits_{(M_2)} \varrho \sin^2\theta \cos\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi;$$

dies aber ist dem numerischen Werte nach kleiner als

$$\varrho_0 r_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi \varrho_0 r_0,$$

kann also durch $4\pi\vartheta\varrho_0 r_0$ ersetzt werden, wenn $-1 < \vartheta < 1$; demnach ist

$$X = X_1 + 4\pi\vartheta\varrho_0 r_0.$$

Für einen beliebigen andern Punkt P' innerhalb M_2 besteht eine ähnliche Gleichung

$$X' = X_1' + 4\pi\vartheta'\varrho_0 r_0'$$

und aus beiden ergibt sich

$$X' - X = \{X_1' - X_1\} + 4\pi\varrho_0(\vartheta' r_0' - \vartheta r_0).$$

Der zweite Theil der rechten Seite kann durch Zusammenziehung von M_2 unter gleichzeitiger Annäherung von P' an P beliebig klein gemacht werden; der erste Theil lässt sich hierauf durch weitere Näherung von P' an P beliebig verringern, weil P, P' Aussenpunkte von M_1 sind; daher lässt sich auch $X' - X$ dem Betrage nach so klein machen als man will, wodurch die Stetigkeit von X auch im Innern erwiesen ist. Ebenso beweist man sie für Y, Z.

Wenn man dieselbe Transformation, welche zu den Ausdrücken (12), (13) für V und seine ersten Ableitungen geführt hat, auch auf die Integrale **294**, (8) anwendet, die für einen Aussenpunkt die zweiten Ableitungen darstellen, so gibt das erste beispielsweise

$$\iiint \frac{-1 + 3\sin^2\theta\cos^2\varphi}{r} \varrho \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

und dies ist für einen Innenpunkt wieder ein uneigentliches Integral, weil r im Nenner verblieben ist. Für Innenpunkte verliert also die Definition der zweiten Ableitungen durch die Gleichungen (8) ihre Bedeutung. Nichtsdestoweniger hat, wie die Beispiele des nächsten Artikels zeigen werden, V auch im Innern bestimmte zweite Ableitungen.

296. Zur Illustration der bisher angestellten Betrachtungen legen wir uns die wichtige Aufgabe vor, *Potential und Anziehung einer homogenen Kugelschale von sehr geringer Dicke für einen äussern und einen innern Punkt zu bestimmen.*

Die Schale sei von zwei Kugeln mit den Radien a und $a + da$ begrenzt und habe die Dichte ϱ. Zerlegt man sie durch Kegelflächen mit dem Scheitel O, Fig. 158, der Axe OP und den Öffnungswinkeln φ und $\varphi + d\varphi$ in ringförmige Elemente, so hat ein solches das Volumen

Fig. 158.

$$dv = 2\pi a^2 \sin\varphi \, da \, d\varphi$$

und sind seine Punkte von P um eine Strecke entfernt, deren Quadrat

$$r^2 = a^2 + D^2 - 2aD\cos\varphi$$

ist; das Potential der Schale ist hiernach

$$V = 2\pi a^2 \varrho \, da \int_0^\pi \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{r}.$$

Aus der darüberstehenden Gleichung folgt aber durch Differentiation

$$r dr = aD \sin\varphi \, d\varphi;$$

macht man davon Gebrauch zur Umformung von V, so wird

$$V = \frac{2\pi a \varrho \, da}{D} \int dr.$$

Ist der Punkt P ein äusserer, so sind $D - a$, $D + a$ die Grenzen von r, daher

$$V = \frac{4\pi\varrho a^2 da}{D} = \frac{\text{Masse der Schale}}{D}. \tag{14}$$

Ist P ein innerer Punkt, so sind die Grenzen von r gleich $a - D$, $a + D$, daher

$$V = 4\pi\varrho a da. \tag{15}$$

Die Richtung der Gesammtanziehung ist hier aus der Massenvertheilung unmittelbar zu entnehmen, sie fällt mit PO zusammen; man findet also ihre Grösse R durch Differentiation von V in Bezug auf D, sodass für einen äussern Punkt

$$R = -\frac{\text{Masse}}{D^2}, \tag{14*}$$

für einen innern

$$R = 0 \tag{15*}$$

Die Ergebnisse lassen sich in folgendem Satze zusammenfassen: *Auf einen äussern Punkt wirkt die Kugelschale so, als ob ihre Masse im Mittelpunkte concentrirt wäre; auf einen innern Punkt übt sie keine Anziehung aus, weil im Innenraume das Potential constant ist.*

Dieser Satz überträgt sich unmittelbar auch auf eine Kugelschale von endlicher Dicke und selbst auf eine Vollkugel, wenn die Dichte der Masse nur von der Entfernung vom Mittelpunkte abhängig ist, Punkte gleicher Dichte also nach concentrischen Kugeln geordnet sind. Im Falle der Vollkugel reducirt sich der Innenraum auf den Mittelpunkt.

Das Potential einer *homogenen* Kugel vom Radius A und der Dichte ϱ in Bezug auf einen äussern Punkt ist hiernach

$$V = \frac{\text{Masse}}{D} = \frac{4\pi\varrho A^3}{3D} \tag{16}$$

und die Anziehung

$$R = -\frac{4\pi\varrho A^3}{3D^2}. \tag{17}$$

Um die entsprechenden Grössen für einen innern Punkt P zu bestimmen, lege man durch denselben eine concentrische Kugelfläche und beachte, dass für die dadurch begrenzte Vollkugel die Gesetze (16), (17), für die äussere Schale die Gesetze (15), (15*) gelten; hiernach ist

$$\left\{\begin{aligned} V &= \frac{4\pi\varrho D^3}{3D} + 4\pi\varrho\int_D^A a\,da \\ &= \frac{4\pi\varrho D^2}{3} + 2\pi\varrho(A^2 - D^2) \\ &= 2\pi\varrho\left(A^2 - \frac{D^2}{3}\right) \end{aligned}\right. \tag{18}$$

und

$$R = -\frac{4\pi\varrho D^3}{3D^2} + 0 = -\frac{4\pi\varrho D}{3}. \tag{19}$$

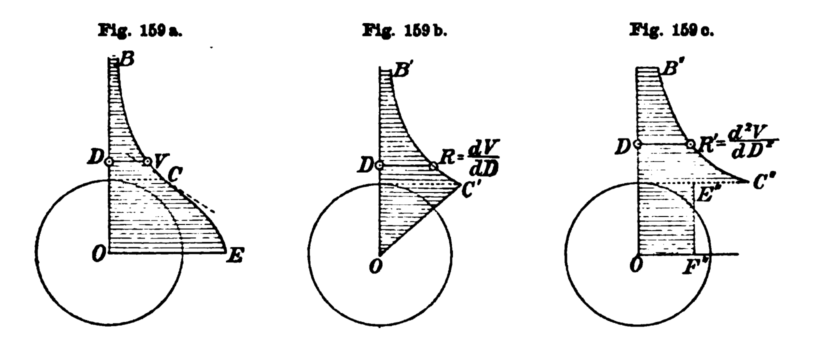
Durch neuerliche Differentiation von R nach D ergibt sich die zweite Ableitung von V in der Richtung OP, und zwar ist für einen Aussenpunkt

$$R' = \frac{dR}{dD} = \frac{d^2V}{dD^2} = \frac{8\pi\varrho A^3}{3D^3}, \tag{20}$$

für einen Innenpunkt

$$R' = \frac{dR}{dD} = \frac{d^2 V}{dD^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}. \tag{21}$$

Die Figuren 159a, b, c stellen den Verlauf von V, R und R' bei veränderlichem D innen und aussen dar.



a) Nach (16) und (18) besteht die den Verlauf von V anzeigende Curve aus einer Hyperbel BC und einer Parabel CE, welche den Punkt C gemein haben, weil beide Formeln für $D = A$ denselben Wert für V liefern.

b) Nach (17) und (19) setzt sich die Curve, welche den Verlauf von R zur Anschauung bringt, aus einer Linie dritter Ordnung $B'C'$ und einer Geraden $C'O$ zusammen, die den Punkt C' gemein haben, weil beide Formeln für $D = A$ denselben Wert R ergeben; aus diesem selben Grunde haben Hyperbel und Parabel der vorigen Figur in C eine gemeinsame Tangente.

c) Nach (20) und (21) besteht endlich die Curve der R' aus der Linie vierter Ordnung $B''C''$ und aus der Geraden $E''F''$, die ausser Zusammenhang sind.

Die Figuren illustriren den stetigen Verlauf von V und seiner ersten Ableitung im ganzen Raume und den stetigen Anschluss von aussen nach innen; sie zeigen aber auch die Unstetigkeit der im Allgemeinen continuirlichen zweiten Ableitung bei dem Übergange von aussen nach innen.

In der *analytischen Darstellung* besteht bei allen drei Grössen eine Unstetigkeit insofern, als V und seine Ableitungen aussen und innen durch verschiedene Functionen ausgedrückt sind.

297. Die Componenten der Anziehung, welche ein *homogener* Körper ausübt, können durch *Oberflächenintegrale* dargestellt, also mittels zweifacher Integration bestimmt werden.

Wir wollen diese wichtige Umformung an der Componente X zeigen, welche, wenn ϱ constant ist, den Ausdruck hat

$$X = \varrho \iiint \frac{(\xi - x)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r^3};$$

bemerkt man aber, dass vermöge

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (z - \zeta)^2}$$

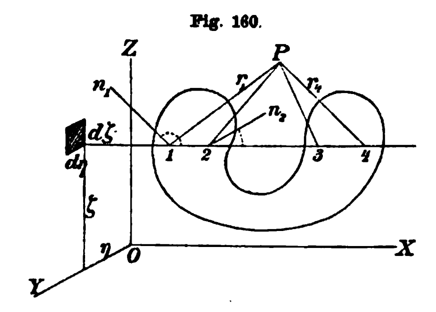
$$\frac{\xi - x}{r^3} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}$$

ist, so erkennt man, dass eine der drei Integrationen sich ausführen lässt, nämlich die nach ξ, indem

$$\int -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}\,d\xi = \left\{-\frac{1}{r}\right\};$$

auf der rechten Seite sind noch die Grenzen einzuführen. Diese werden durch die Punkte 1, 2, 3, 4, Fig. 160, bestimmt, in welchen die durch den Punkt η/ζ der yz-Ebene parallel zur x-Axe gezogene Gerade die Oberfläche des Körpers schneidet; die Integration nach ξ geschieht nämlich längs dieser Geraden von 1 nach 2, dann von 3 nach 4, weshalb

Fig. 160.



$$\int -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}\,d\xi = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}.$$

Dies wäre mit $d\eta\,d\zeta$ zu multipliciren und weiter zu integriren. Die über dem Rechteck $d\eta\,d\zeta$ errichtete prismatische Säule der Richtung OX schneidet aber aus der Oberfläche vier Flächenelemente dS_1, dS_2, dS_3, dS_4 aus, die jenes Rechteck zur Projection haben; bezeichnet man also den stumpfen Winkel, den die *äussere* Normale n_1 in 1 mit der positiven x-Richtung

bestimmt, mit (n_1, x), den spitzen Winkel, welchen in gleicher Weise die Normale n_2 in 2 bildet, mit (n_2, x), u. s. w., so ist

$$d\eta\, d\zeta = -dS_1 \cos(n_1, x) = dS_2 \cos(n_2, x) \\ = -dS_3 \cos(n_3, x) = dS_4 \cos(n_4, x),$$

daher

$$d\eta\, d\zeta \int -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}\, d\xi = -\sum_1^4 \frac{dS_i \cos(n_i, x)}{r_i}$$

und

(22) $$X = -\varrho \iint \frac{dS \cos(n, x)}{r},$$

die Integration über alle Elemente der Oberfläche ausgedehnt.

In derselben Weise transformiren sich Y und Z zu

(22*) $$\begin{cases} Y = -\varrho \iint \dfrac{dS \cos(n, y)}{r}, \\ Z = -\varrho \iint \dfrac{dS \cos(n, z)}{r}. \end{cases}$$

Wir wollen von diesem Verfahren Gebrauch machen, um die Anziehung einer homogenen Kugel direct zu bestimmen und mittelbar daraus ihr Potential abzuleiten.

Verlegt man den Mittelpunkt der Kugel, deren Radius A sei, nach dem Ursprunge, den Aufpunkt P in die positive z-Axe und wendet Polarcoordinaten an, so ist (**289**, (8))

$$dS = A^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$(n, z) = \theta$$
$$r = \sqrt{A^2 + D^2 - 2AD\cos\theta},$$

somit nach (22*), weil $Z = R$, die Gesammtanziehung

$$R = -\varrho A^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{A^2 + D^2 - 2AD\cos\theta}}$$

$$= -2\pi\varrho A^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{A^2 + D^2 - 2AD\cos\theta}};$$

durch partielle Integration ergibt sich weiter

$$R = -\frac{2\pi\varrho A}{D}\Big\{\cos\theta\sqrt{A^2+D^2-2AD\cos\theta}$$

$$+\int\sqrt{A^2+D^2-2AD\cos\theta}\,\sin\theta\,d\theta\Big\}_0^\pi$$

$$= -\frac{2\pi\varrho A}{D}\Big\{\cos\theta\sqrt{A^2+D^2-2AD\cos\theta}$$

$$+\frac{1}{3AD}\left(\sqrt{A^2+D^2-2AD\cos\theta}\right)^3\Big\}_0^\pi .$$

Bei Einführung der Grenzen muss nun zwischen einem äussern und einem innern Punkt unterschieden und darauf geachtet werden, dass die auftretende Quadratwurzel mit ihrem absoluten Werte zu nehmen ist.

Man findet für einen äussern Punkt $(D > A)$

$$R = -\frac{2\pi\varrho A}{D}\Big\{-(D+A)-(D-A)$$

$$+\frac{1}{3AD}\left[(D+A)^3-(D-A)^3\right]\Big\} = -\frac{4\pi\varrho A^3}{3D^2}$$

in Übereinstimmung mit (17); für einen innern Punkt $(D<A)$

$$R = -\frac{2\pi\varrho A}{D}\Big\{-(A+D)-(A-D)$$

$$+\frac{1}{3AD}\left[(A+D)^3-(A-D)^3\right]\Big\} = -\frac{4\pi\varrho D}{3}$$

in Übereinstimmung mit (19).

Aus $R = \frac{dV}{dD}$ ergibt sich durch Integration nach D das Potential und zwar aussen

$$V = -\frac{4\pi\varrho A^3}{3}\int\frac{dD}{D^2} = \frac{4\pi\varrho A^3}{3D} + C;$$

der Wert der Integrationsconstante resultirt aus der Bemerkung, dass für $\lim D = \infty$ $\lim V = 0$ ist; es ist $C = 0$, sodass endgiltig

$$V = \frac{4\pi\varrho A^3}{3D}$$

wie in (16). Im Innern dagegen ist

$$V = -\frac{4\pi\varrho}{3}\int D\,dD = -\frac{2\pi\varrho D^2}{3} + C';$$

hier bedeutet C' das Potential im Centrum der Kugel; zerlegt man zu seiner Bestimmung die Kugel in concentrische

Schalen, so hat eine solche, deren Radien a, $a + da$ sind, die Masse

$$4\pi\varrho a^2 da$$

und das Potential

$$4\pi\varrho a da,$$

sodass

$$C' = 4\pi\varrho \int_0^A a da = 2\pi\varrho A^2;$$

mithin ist

$$V = 2\pi\varrho \left(A^2 - \frac{D^2}{3}\right),$$

wie auch in (18) gefunden worden ist.

298. Anknüpfend an die letzte Formel sollen die zweiten Ableitungen von V für einen Punkt im Innern der homogenen Kugel bestimmt werden. Macht man den Mittelpunkt der Kugel zum Ursprunge, während der Aufpunkt eine beliebige Lage gegen das Coordinatensystem hat, so ist

$$D^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$V = 2\pi\varrho \left(A^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi\varrho x}{3}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4\pi\varrho y}{3}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4\pi\varrho z}{3},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3};$$

es haben also die zweiten Differentialquotienten bestimmte Werte und ihre Summe ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho \tag{23}$$

im Gegensatze zur Laplace'schen Gleichung (11), welche für einen äussern Punkt bei *beliebiger* anziehender Masse gegolten hat.

Die Gleichung (23), nach ihrem Urheber die *Poisson'sche Gleichung* genannt, gilt mit entsprechender Deutung und Einschränkung für jeden beliebigen Körper.

Es sei ein beliebiger nicht homogener Körper und innerhalb desselben ein Aufpunkt P gegeben; dem Ganzen liege

ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde. Unter der Voraussetzung, dass die Dichte in der Umgebung von P keine Unstetigkeit erleidet, kann man sich eine so kleine den Punkt P einschliessende Kugel ausgeschieden denken, dass innerhalb derselben die Masse als homogen und mit der am Punkte P herrschenden Dichte ϱ begabt angesehen werden kann. Heisst M_2 die Masse dieser Kugel, M_1 die übrige, M die ganze Masse, so gilt für die Potentiale V_2, V_1, V die Gleichung

$$V = V_1 + V_2,$$

daher auch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right\} + \left\{\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\right\};$$

der erste Klammerausdruck hat den Wert 0, weil P in Bezug auf M_1 aussen liegt; der zweite Klammerausdruck nach dem eben behandelten speciellen Falle den Wert $-4\pi\varrho$; daher ist auch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho.$$

Es besteht also die Poisson'sche Gleichung auch hier, *wenn unter ϱ die am Aufpunkte herrschende Dichte verstanden wird.*

Im Aussenraume gilt die Laplace'sche Gleichung (11), im Innenraume die Poisson'sche Gleichung (23), an der Trennungsfläche keine von beiden; letzteres gilt auch von Punkten im Innern, bei deren Überschreitung die Dichte unstetig sich ändert, also an den Trennungsflächen ungleich dichter Massentheile. Diese Thatsachen hängen mit der an einem besondern Beispiel (**296**) schon erkannten Unstetigkeit der zweiten Ableitungen von V beim Übergange von aussen nach innen zusammen.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Laplace'sche Gleichung als besonderer Fall der Poisson'schen angesehen werden kann, insofern an einem äussern Punkte die Dichte der anziehenden Masse $= 0$ ist.

299. Eine von dem Aufpunkte P ausgehende Richtung S bilde mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen

die Winkel α, β, γ; dann ist der nach dieser Richtung gebildete Differentialquotient des Potentials (48 und 293, (4))

$$(24)\begin{cases}\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma \\ \quad = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma \\ \quad = R\left(\cos\alpha\cos(R,X) + \cos\beta\cos(R,Y) + \cos\gamma\cos(R,Z)\right) \\ \quad = R\cos(R,S).\end{cases}$$

Es ist also der in einer durch P gehenden Richtung und an der Stelle P genommene Differentialquotient des Potentials die in diese Richtung fallende Normalcomponente der dort herrschenden Gesammtanziehung.

Bezeichnet man diese Componente mit $\mathfrak{S}$, so folgt aus (24)

$$dV = \mathfrak{S}\cdot ds;$$

hiernach bedeutet die Änderung, welche das Potential bei dem Übergange von P zu dem benachbarten Punkte P' (wobei $PP' = ds$) erleidet, *die Arbeit, welche geleistet wird, wenn die im Aufpunkte P vorhandene Masse nach P' transportirt wird.*

Wird also diese Masse auf irgend einer von P ausgehenden Bahn ins Unendliche gebracht, so ist die dabei geleistete Arbeit

$$\mathfrak{A} = \int_{(P)}^{(\infty)} dV = \left\{V\right\}_{(P)}^{(\infty)} = V,$$

weil ja V im Unendlichen verschwindet. *Es stellt demnach das Potential in einem Punkte P die Arbeit dar, welche geleistet werden müsste, um die in P vorhandene Masse ins Unendliche zu schaffen.*

Dieser Satz ist ein specieller Fall des allgemeineren, wornach die Potentialdifferenz zweier Punkte P und P' der bei dem Transporte der Masse des Aufpunktes aus P nach P' aufgewendeten Arbeit gleichkommt.

300. Die Gleichung

$$(25)\qquad V = C$$

stellt bei festem C eine Fläche dar, und zwar jene Fläche, welche Aufpunkte des Potentialwertes C *) verbindet. Bei

*) Die Fläche ist selbstverständlich nur dann reell, wenn die zu Grunde liegende Masse überhaupt den Potentialwert C zu erzeugen vermag.

veränderlich gedachtem C entspricht ihr ein ganzes System solcher Flächen, die man als *äquipotentielle* oder als *Niveauflächen* bezeichnet; sie erfüllen vermöge der Eindeutigkeit von V den Raum einfach, d. h. durch jeden Punkt des Raumes geht nur eine derselben.

Ist P ein Punkt von (25) und S eine durch ihn gehende *in die Fläche fallende* Richtung, so ist vermöge (25)

$$\frac{dV}{ds} = 0;$$

der Vergleich mit (24) führt zu

$$\cos(R, S) = 0.$$

Die Richtung der Anziehung in P steht also zu allen in der Niveaufläche liegenden Richtungen senkrecht, fällt daher mit der Richtung N der Normale der Niveaufläche zusammen. Hieraus ergibt sich, dass

$$\frac{dV}{dn} = R. \tag{26}$$

Der in der Richtung der Normale der Niveaufläche gebildete Differentialquotient des Potentials bedeutet also die Gesammtanziehung.

Man kann aus der Gleichung (26), wenn man deren linke Seite als Quotienten auffasst, einen Schluss auf die Lagerung der Niveauflächen ziehen. Weil nämlich zwischen zwei benachbarten Niveauflächen eine constante Potentialdifferenz dV besteht, so sagt die Gleichung (26), dass die Anziehung dem Normalabstande der Niveauflächen umgekehrt proportional ist

Wenn eine Curve im Raume so verläuft, dass sie die Niveauflächen (25) rechtwinklig durchschneidet, so zeigt in jedem ihrer Punkte die Tangente die Richtung der dort herrschenden Gesammtanziehung an. Solche Curven nennt man aus diesem Grunde *Kraftlinien*.

Fünfter Abschnitt.

Differentialgleichungen.

301. Jede Gleichung zwischen *einer* unabhängigen Variabeln x, einer oder mehreren unbekannten Functionen $y, z, \ldots$ derselben und Differentialquotienten der letzteren in Bezug auf x heisst eine *gewöhnliche Differentialgleichung.*

Jede Gleichung zwischen *mehreren* unabhängigen Variabeln $x, y, \ldots$, einer oder mehreren unbekannten Functionen $z, u, \ldots$ dieser Variabeln und Differentialquotienten von $z, u, \ldots$, genommen nach den $x, y, \ldots$, heisst eine *partielle Differentialgleichung.*

Die Aufgabe, welche der Analysis einer solchen Gleichung oder einem System derartiger Gleichungen gegenüber erwächst, besteht im engeren Sinne in der Aufsuchung aller solchen Functionen $y, z, \ldots$ im ersten, beziehungsweise $z, u, \ldots$ im zweiten Falle, welche nebst ihren betreffenden Differentialquotienten die vorgelegten Differentialgleichungen identisch, d. i. für alle Werte der unabhängigen Variabeln erfüllen. Im weiteren Sinne richtet sich die Aufgabe dahin, aus den Differentialgleichungen selbst Eigenschaften der durch sie definirten Functionen zu gewinnen.

Die durch die obigen Definitionen gekennzeichnete Scheidung in gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen drückt sich in der Theorie und Behandlung der Differentialgleichungen am schärfsten aus. Innerhalb jeder dieser Gattungen ist am meisten maassgebend die Ordnung des höchsten vorkommenden Differentialquotienten; durch sie ist die *Ordnung der Differentialgleichung* bestimmt.

In den Anwendungsgebieten der Analysis, insbesondere in der Geometrie und Mechanik, treten Differentialgleichungen auf, so oft die Natur eines geometrisches Gebildes oder das

Gesetz einer Erscheinung durch eine Gleichung zum Ausdruck gebracht wird, in welche nebst den bestimmenden Variabeln auch deren Differentiale oder die Differentialquotienten einzelner unter ihnen in Bezug auf die andern eingehen. In vielen Fällen ist es möglich, den Verlauf einer Erscheinung während eines sehr kurzen Zeittheilchens zu kennzeichnen: der Ausdruck hiefür ist dann eine *Differentialgleichung* und Aufgabe der Analysis ist es, daraus die *endliche Gleichung* zu gewinnen, welche den Verlauf während einer beliebigen Zeit angibt.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

§ 1. Differentialgleichungen erster Ordnung. Allgemeines.

302. Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung hat die allgemeine Form

$$f(x, y, y') = 0; \tag{1}$$

wesentlich ist dabei jedoch nur das Auftreten von y'; x oder y oder beide zugleich brauchen nicht explicite vorzukommen.

Die Gleichung lösen heisst alle Functionen y von x bestimmen, welche nebst ihrem Differentialquotienten y' sie identisch befriedigen.

Dieser analytischen Formulirung der Aufgabe lässt sich eine geometrische an die Seite stellen. Werden x, y als (rechtwinklige) Coordinaten eines Punktes der Ebene aufgefasst, so bedeutet y' den Richtungscoefficienten der Tangente an die den Verlauf von y darstellenden Curve im Punkte x/y. Die Gleichung (1) lösen heisst dann *alle Curven bestimmen, deren Punkte im Vereine mit den zugehörigen Tangenten dieselbe befriedigen.*

Fig. 161.

In noch anderer Weise kann die Gleichung (1) aufgefasst und die Forderung nach ihrer Lösung ausgesprochen werden, wenn man sich des Begriffs „Linienelement“ bedient; darunter soll der Complex aus einem Punkte x/y und einer durch ihn gehenden Geraden, Fig. 161, verstanden werden; bezeichnet man den Richtungscoefficienten der letzteren mit y', so sind $x/y/y'$ die Bestimmungsstücke oder Coordinaten des Linienelementes.

Angenommen, dass die Gleichung (1) in Bezug auf y algebraisch und vom ersten *Grade* ist, so liefert sie zu jeder Wertverbindung x/y einen Wert von y', bestimmt also so viele Linienelemente, als es Punkte in der Ebene gibt; mit andern Worten, sie definirt ein *zweifach unendliches* System von Linienelementen. Die Gleichung lösen wird also nach dem Vorausgehenden dahin zu deuten sein, *die durch sie definirten Linienelemente auf alle möglichen Arten in einfach unendliche Scharen ordnen derart, dass die Punkte eine Curve und die Geraden die Tangenten dieser Curve in den zugeordneten Punkten bilden.*

Weil, wie die Folge lehren wird, die Lösung einer Differentialgleichung im Allgemeinen die Ausführung von Integrationen erfordert, so gebraucht man den Ausdruck „Integration einer Differentialgleichung" im Sinne ihrer Lösung und nennt jede Function y von x oder jede Gleichung zwischen x, y, welche der Gleichung (1) genügt, ein Integral derselben.

303. Betrachtet man in der Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

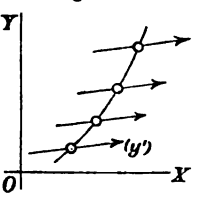


Fig. 162.

y' als constant, so stellt sie eine Curve dar; diese verbindet die Punkte von Linienelementen gleicher, durch den besonderen Wert von y' gekennzeichneter Richtung, Fig. 162. Lässt man y' alle Werte durchlaufen, deren es vermöge (1) fähig ist, so beschreibt die Curve ein einfaches unendliches Curvensystem.

Von diesem Curvensystem ausgehend kann man eine Lösung der Gleichung (1) wie folgt sich construirt denken. Es sei

$$y_0', \; y_1', \; y_2', \ldots y_i', \; y_{i+1}', \ldots$$

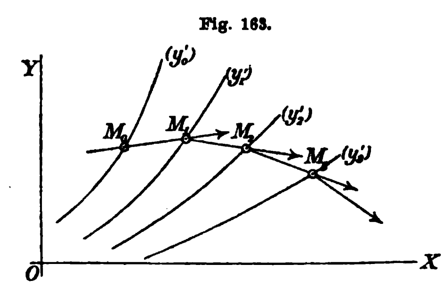
eine Reihe in kleinen Intervallen fortschreitender Werte von y'; die ihnen entsprechenden Curven seien

$$(y_0'), \; (y_1'), \; (y_2'), \ldots (y_i'), \; (y_{i+1}'), \ldots,$$

Fig. 163. Von einem *beliebigen* Punkte M_0 der Curve (y_0') ausgehend lege man durch denselben ein Linienelement der Richtung y_0'; durch den Punkt M_1, in welchem die Gerade

dieses Elementes die Curve (y_1') zunächst schneidet, ein weiteres Linienelement der Richtung y_1'; durch den Punkt M_2, in welchem die Gerade dieses Elements die Curve (y_2') zunächst trifft, ein drittes Linienelement der Richtung y_2', u. s. w. Das auf diese Weise construirte Polygon nähert sich bei Abnahme aller Intervalle (y_i', y_{i+1}') gegen Null einer Curve als Grenze, welche mit ihren Punkten und den Tangenten in denselben der Gleichung (1) genügt, folglich *eine Lösung* dieser Gleichung bildet. Mit Rücksicht auf die Schlussbemerkung des vorigen Artikels wird eine solche Curve auch als *Integralcurve* der genannten Gleichung bezeichnet.

Fig. 163.



Da jeder Punkt der Curve (y_0') zum Ausgangspunkte für eine solche Integralcurve genommen werden kann, so gibt es der Integralcurven ein einfach unendliches System, dessen Gleichung die Form

$$F(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

haben wird; der veränderliche Parameter C, dessen Einzelwerte die einzelnen Integralcurven oder *Particularintegrale* individualisiren, heisst die *willkürliche Constante* und die Gleichung (2) das *allgemeine* oder *vollständige Integral* der Gleichung (1); sie stellt die allgemeinste Beziehung zwischen x und y vor, welche mit der Differentialgleichung (1) im Einklange steht.

Umgekehrt, ist ein einfach unendliches Curvensystem durch die Gleichung

$$\Phi(x, y, a) = 0 \tag{3}$$

mit dem veränderlichen Parameter a gegeben, so existirt eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche dem Systeme entspricht. Dieselbe wird dadurch erhalten, dass man aus (3) durch Differentiation in Bezug auf x die weitere Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \tag{4}$$

ableitet und zwischen beiden den Parameter a eliminirt; das Resultat dieser Elimination, von der allgemeinen Form

$$\varphi(x, y, y') = 0, \tag{5}$$

ist die besagte Differentialgleichung. Sie drückt die Beziehung aus, welcher *alle* Linienelemente des Curvensystems (3) Genüge leisten und heisst die Differentialgleichung dieses Curvensystems.

Daraus ergibt sich die wichtige Thatsache, *dass ein einfach unendliches Curvensystem analytisch in zweifacher Weise charakterisirt werden kann:* durch eine endliche Gleichung zwischen zwei Variabeln und einem veränderlichen Parameter und durch eine Differentialgleichung erster Ordnung mit denselben zwei Variabeln.

304. Bei Lösung von Aufgaben, welche Curvensysteme betreffen, wird bald von der endlichen, bald von der Differentialgleichung mit Vortheil Gebrauch zu machen sein. Zur Illustration mögen die folgenden Beispiele dienen.

Beispiel 1. Durch die Gleichungen

$$y - b = m(x - a)$$
$$y - b' = m'(x - a'),$$

wenn darin m, m' als veränderliche Parameter gelten, sind zwei Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten a/b, a'/b' bestimmt. Besteht zwischen den Parametern die in Bezug auf beide lineare Gleichung

$$\alpha m m' + \beta m + \gamma m' + \delta = 0,$$

so sind dadurch die Strahlen beider Büschel in gegenseitig eindeutiger Zuordnung, und der Ort der Schnittpunkte zugeordneter Strahlen oder *das Erzeugnis der beiden Büschel* ergibt sich durch Elimination von m, m' zwischen obigen drei Gleichungen, wodurch

$$\alpha(y - b)(y - b') + \beta(x - a')(y - b) + \gamma(x - a)(y - b') + \delta(x - a)(x - a') = 0$$

erhalten wird; dies aber ist eine Gleichung zweiten Grades in Bezug auf x, y. *Das Erzeugnis zweier projectiven Strahlenbüschel*) ist also eine Kegelschnittslinie.*

---

*) Das Wesen der Projectivität zweier Gebilde erster Stufe (Punktreihen, Strahlenbüschel etc.) besteht in der gegenseitig eindeutigen Zuordnung ihrer Elemente.

Beispiel 2. Es ist der Ort der Punkte zu bestimmen, in welchen die Kreise des Kreisbüschels

$$x^2 + y^2 - 2\beta y = a^2 \tag{6}$$

— veränderlicher Parameter β — von den Geraden des Strahlenbüschels

$$y - c = m(x - b) \tag{7}$$

— veränderlicher Parameter m — A) rechtwinklig geschnitten, B) berührt werden.

Eliminirt man zwischen der Gleichung (6) und der daraus hervorgehenden

$$x + yy' - \beta y' = 0$$

den Parameter β, so erhält man die Differentialgleichung

$$(x^2 - y^2 - a^2)y' = 2xy \tag{8}$$

des Kreisbüschels. Auf demselben Wege ergibt sich aus (7) und

$$\frac{dy}{dx} = m$$

die Differentialgleichung des Strahlenbüschels

$$y - c = \frac{dy}{dx}(x - b); \tag{9}$$

zur Unterscheidung sind in (8) und (9) für den Differentialquotienten verschiedene Symbole gebraucht worden.

Im Sinne der Forderung A) ist der Ort solcher Punkte zu bestimmen, in welchen

$$y'\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

ist; seine Gleichung ergibt sich durch Elimination von y' und $\frac{dy}{dx}$ zwischen dieser und den Gleichungen (8), (9); sie lautet

$$(x^2 + y^2)x - b(x^2 - y^2) - 2cxy - a^2x + a^2b = 0.$$

Die Forderung B) verlangt den Ort von Punkten, in welchen

$$y' = \frac{dy}{dx};$$

die Elimination von y', $\frac{dy}{dx}$ führt jetzt zu

$$(x^2 + y^2)y + c(x^2 - y^2) - 2bxy + a^2y - a^2c = 0.$$

Die verlangten geometrischen Orte*) sind also Curven dritter Ordnung, welche wegen des gleichartigen Baues ihrer Gleichungen ähnliche Eigenschaften besitzen.

305. Es ist im voraus einleuchtend, dass zwischen der Structur einer Differentialgleichung und derjenigen ihres allgemeinen Integrals ein Zusammenhang bestehen wird. Bevor wir diesen Zusammenhang in einer Anzahl wichtiger Fälle feststellen, wollen wir einen hiermit zusammenhängenden Begriff entwickeln.

Es sei

$$F(x, y, C) = 0 \tag{10}$$

ein einfach unendliches Curvensystem; auf dasselbe werde die Transformation (68, II)

$$x = \varphi(x_1, y_1, a), \qquad y = \psi(x_1, y_1, a) \tag{11}$$

mit dem veränderlichen Parameter a angewendet. Verwandelt sich dabei die Gleichung (10) in eine gleichartig gebaute mit den Variabeln x_1, y_1, nämlich in

$$F(x_1, y_1, C_1) = 0, \tag{12}$$

so bedeutet dies, dass durch die Transformation (11) jede Curve von (10) in eine bestimmte andere desselben Systems verwandelt worden ist; es wird im Allgemeinen C_1 eine Function von C und a sein. Wir wollen dann sagen, das Curvensystem (10) gehe bei der Transformation (11) in sich selbst über oder bleibe *invariant*.

Ist

$$f(x, y, y') = 0 \tag{13}$$

die zu (10) gehörige Differentialgleichung, so kann die zu (12) gehörige auf zweifache Weise gewonnen werden; einmal durch Anwendung der Transformation (11) auf (13), oder aber durch Differentiation von (12) nach x_1 und Elimination von C_1; da aber (12) mit (10) bis auf die Bezeichnungen völlig über-

*) Die Ortscurven können auch als Erzeugnisse des vorgelegten Kreisbüschels mit zwei projectiven Strahlenbüscheln dargestellt werden, die erste mit dem Durchmesserbüschel aus dem Punkte b/c, die zweite mit dem Polarenbüschel, welches dem genannten Punkte in Bezug auf das Kreisbüschel entspricht.

einstimmt, so wird auch die neue Differentialgleichung mit jener (13) übereinstimmen, also lauten müssen

$$(14) \qquad f(x_1, y_1, y_1') = 0.$$

Es ändert hiernach eine Transformation, welche ein Curvensystem invariant lässt, auch die Form seiner Differentialgleichung nicht oder lässt auch diese invariant.

Gelingt es also, zu einer gegebenen Differentialgleichung eine Transformation zu finden, bei welcher sie invariant bleibt, so führt diese selbe Transformation auch das System der Integralcurven in sich selbst über. Wie daraus auf die Form dieses Integrals geschlossen werden kann, werden die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 1. Die Differentialgleichung

Fig. 164.

Y O X

$$(15) \qquad f(x, y') = 0,$$

in welcher y explicit nicht vorkommt, definirt ein System von Linienelementen von solcher Beschaffenheit, dass die Punkte paralleler Elemente auf Geraden parallel der y-Axe liegen, Fig. 164.

Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass ihr allgemeines Integral bei allen Translationen parallel zur y-Axe invariant bleibt und daher die Form hat

$$(16) \qquad F(x, y + C) = 0.$$

In der That, die genannten Translationen sind durch

$$(17) \qquad x = x_1, \qquad y = y_1 + a$$

bestimmt; dadurch verwandelt sich (16) in

$$F(x_1, y_1 + C_1) = 0, \quad \text{wobei} \quad C_1 = C + a$$

und (15), weil $dx = dx_1$, $dy = dy_1$, also $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{dy_1}{dx_1} = y_1'$ ist, in

$$f(x_1, y_1') = 0.$$

Beispiel 2. Gleiche Überlegungen führen dazu, dass eine Differentialgleichung

$$(18) \qquad f(y, y') = 0,$$

in welcher x nicht erscheint, ein Integral von der Form

(19) $$F(x + C, y) = 0$$

hat, welches bei allen Translationen parallel zur x-Axe

(20) $$x = x_1 + a, \qquad y = y_1$$

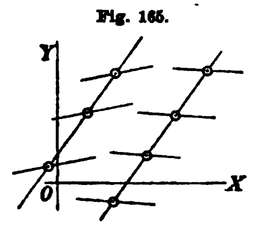
unverändert bleibt.

Beispiel 3. Die Differentialgleichung

(21) $$f(y - kx, y') = 0,$$

in welcher k eine Constante bedeutet, definirt ein System von Linienelementen, in welchem Punkte paralleler Elemente auf Geraden vom Richtungscoefficienten k liegen, Fig. 165. Ihr Integral bleibt daher bei allen Translationen in der durch k bezeichneten Richtung unverändert, hat somit die Form

Fig. 165.



(22) $$F(x + C, y + kC) = 0.$$

Derlei Translationen sind durch

(23) $$x = x_1 + a, \qquad y = y_1 + ka$$

bestimmt; hierdurch aber verwandelt sich (22) thatsächlich in

$$F(x_1 + C_1, y_1 + kC_1) = 0 \quad \text{mit} \quad C_1 = C + a$$

und (21) in

(24) $$f(y_1 - kx_1, y_1') = 0.$$

Beispiel 4. Die Differentialgleichung

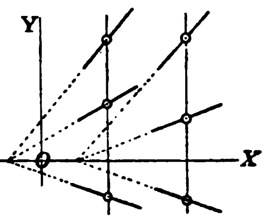
(25) $$f\left(x, \frac{y'}{y}\right) = 0$$

ändert sich nicht, wenn man auf sie die Transformationen

(26) $$x = x_1, \qquad y = ay_1,$$

welche als ***affine Transformationen*** orthogonal zur x-Axe bezeichnet werden, anwendet, Fig. 166. Mithin hat ihr allgemeines Integral die Form

Fig. 166.



(27) $$F(x, Cy) = 0.$$

Beispiel 5. Man überzeugt sich in gleicher Weise, dass die Differentialgleichung

(28) $$f(y, xy') = 0$$

bei den affinen Transformationen orthogonal zur y-Axe

$$x = ax_1, \qquad y = y_1 \tag{29}$$

unverändert bleibt und daher ein Integral von der Form

$$F(Cx, y) = 0$$

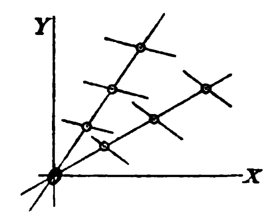
besitzt.

Beispiel 6. Eine Differentialgleichung von der Gestalt

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{30}$$

wird eine *homogene* Differentialgleichung genannt. Sie definirt ein System von Linienelementen solcher Art, dass die Punkte paralleler Elemente auf Geraden durch den Ursprung liegen, Fig. 167.

Fig. 167.



Daraus schliesst man, dass das System der Integralcurven bei *perspectivischer Transformation* aus dem Ursprunge, d. h. bei proportionalen Veränderungen aller Strahlen aus dem Ursprunge unverändert bleibt, dass mithin das allgemeine Integral den Bau

$$F(x, y) + C\Phi(x, y) = 0 \tag{31}$$

haben müsse, worin F, Φ homogene Functionen bedeuten.

Thatsächlich verwandeln die perspectivischen Transformationen

$$x = ax_1, \qquad y = ay_1 \tag{32}$$

die Gleichung (30) in

$$y_1' = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right);$$

und auf (31) angewendet geben sie, wenn F vom Homogenitätsgrade r, Φ vom Grade s ist, nach 55

$$F(x_1, y_1) + C_1\Phi(x_1, y_1) = 0 \quad \text{mit} \quad C_1 = a^{s-r}C.$$

§ 2. Integrationsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung.

306. Einen Ausdruck Xdx, wo X Function von x allein ist, nennt man ein exactes Differential in x.

Wenn die Glieder einer Differentialgleichung exacte Differentiale sind, so sagt man, die Variabeln seien *getrennt;* die

Integration der Gleichung kann dann unmittelbar vollzogen werden.

Hat nämlich eine Differentialgleichung erster Ordnung und *ersten Grades* (in Bezug auf y') die Form

$$Xdx + Ydy = 0, \tag{1}$$

so folgt aus ihr unmittelbar

$$\int X dx + \int Y dy = C; \tag{2}$$

diese endliche Gleichung bildet das allgemeine Integral der vorausgehenden. Dabei wird die Lösung als vollzogen betrachtet, gleichgiltig, ob es möglich ist, die Integrale durch die elementaren Functionen in endlicher Form darzustellen oder nicht.

In manchen Fällen gelingt die *Trennung der Variabeln* durch einen einfachen Rechnungsprocess, wie z. B. in dem Falle

$$X_1 Y_2 dx + X_2 Y_1 dy = 0,$$

wo man nach Multiplication mit $\frac{1}{X_2 Y_2}$ erhält

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_1}{Y_2} dy = 0.$$

In andern Fällen muss zu besondern Hilfsmitteln gegriffen werden, und unter diesen ist die Transformation einer oder beider Variabeln eines der wichtigsten.

307. *Beispiele.* 1) Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2 + 1}{x^2 + 1} = 0$$

lautet nach Trennung der Variabeln

$$\frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{dy}{y^2 + 1} = 0$$

und gibt zunächst

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C.$$

Von dieser transcendenten Form kann man leicht zu einer algebraischen Form übergehen, wenn man die linke Bogensumme durch *einen* Bogen ersetzt und für C schreibt $\operatorname{arctg} c$; es ist dann

$$\operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy} = \operatorname{arctg} c,$$

und daraus folgt

$$\frac{x+y}{1-xy}=c.$$

Auch bei den Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \qquad \frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

ergibt sich das Integral zunächst in transcendenter Form, nämlich

$$l.\frac{y}{x}=C, \qquad \arcsin x+\arcsin y=C;$$

man kann aber auf ähnlichem Wege zu den algebraischen Gleichungen

$$y=cx, \qquad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c$$

übergehen.

2) Die Bahn eines Punktes zu bestimmen, dessen Bewegungsrichtung in jedem Augenblicke senkrecht ist zu dem nach einem festen Punkte O geführten Strahle, Fig. 168.

Fig. 168.

Y T M φ y α O x X

Weil $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$ und $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}$, so lautet die Differentialgleichung der Bahncurven

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}+1=0$$

und nach Trennung der Variabeln

$$x\,dx+y\,dy=0;$$

demnach ist die Gleichung der Bahncurven selbst

$$x^2+y^2=C.$$

3) Mit Beziehung auf die frühere Figur sei die Bahncurve eines Punktes zu bestimmen, dessen Bewegungsrichtung in jedem Augenblicke so beschaffen ist, dass φ und α complementäre Winkel sind.

Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

folgt

$$x^2-y^2=C$$

als Gleichung der Bahncurven.

4) Die Curven mit constanter Subnormale a) im rechtwinkligen, b) im polaren Systeme zu bestimmen.

a) Aus der bezüglichen Differentialgleichung

$$y\frac{dy}{dx} = a$$

ergibt sich

$$y^2 = 2ax + C.$$

b) Im andern Falle ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = a$$

die Differentialgleichung und

$$r = a\varphi + C$$

die Gleichung der Curven selbst.

Die erste Eigenschaft kommt also congruenten zur x-Axe symmetrischen Parabeln, die zweite archimedischen Spiralen zu.

5) Um die Differentialgleichung

$$(1 + xy)y\,dx + (1 - xy)x\,dy = 0,$$

bei welcher die Trennung der Variabeln unmittelbar nicht vollzogen werden kann, zu integriren, führe man an Stelle von x, y neue Variable z, u wie folgt ein:

$$xy = z$$
$$\frac{x}{y} = u;$$

daraus ergibt sich

$$x\,dy + y\,dx = dz$$
$$y\,dx - x\,dy = y^2 du$$
$$= \frac{z}{u}\,du$$

und die Gleichung lautet nunmehr

$$dz + \frac{z^2}{u}\,du = 0;$$

hier lassen sich die Variabeln trennen und die Integration gibt

$$l.u - l.C = \frac{1}{z};$$

kehrt man zu den ursprünglichen Variabeln zurück, so ist

$$x = Cye^{\frac{1}{xy}}$$

das allgemeine Integral.

308. In **305**, 6) wurde bereits eine *homogene* Differentialgleichung als eine solche definirt, welche y' als Function von $\frac{y}{x}$ darstellt, und gezeigt, dass ihr Integralcurven-System bei den perspectivischen Transformationen aus dem Ursprunge unverändert bleibt. Eine solche Gleichung entspringt aus der allgemeineren Form

$$\varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy = 0, \tag{1}$$

in welcher $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ homogene Functionen desselben Grades vorstellen. Ist n dieser Grad, so ist

$$\varphi(x, y) = x^n\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad \psi(x, y) = x^n\psi\left(1, \frac{y}{x}\right);$$

daher lautet (1) nach Unterdrückung des Factors x^n

$$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Führt man x und $\frac{y}{x} = u$ als Variable ein, so kommt man vermöge der Beziehung

$$dy = u\,dx + x\,du$$

zu der neuen Form

$$\varphi(1, u)dx + \psi(1, u)(u\,dx + x\,du) = 0,$$

in welcher sich die Variabeln trennen lassen wie folgt:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(1, u)du}{\varphi(1, u) + u\psi(1, u)} = 0;$$

die Integration ergibt dann

$$l.x + \int\frac{\psi(1, u)du}{\varphi(1, u) + u\psi(1, u)} = C. \tag{2}$$

Hat also die Gleichung die Gestalt

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3}$$

so lautet die Lösung

$$l.x - \int\frac{du}{f(u) - u} = C. \tag{4}$$

Nach vollzogener Integration ist u wieder durch $\frac{y}{x}$ zu ersetzen.

309. *Beispiele.* 1) Die Differentialgleichung

$$(ax + by)dx + (a'x + b'y)dy = 0$$

lässt Lösung in endlicher Form zu. Denn nach (2) ist ihr Integral

$$l.x + \int \frac{(a' + b'u)du}{a + (b + a')u + b'u^2} = C,$$

und die vorgeschriebene Integration ist nach den für die gebrochenen rationalen Functionen ausgeführten Methoden ausführbar.

Auf den obigen Fall lässt sich die allgemeinere Gleichung

$$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

zurückführen, wenn man

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta$$

setzt und die Constanten x_0, y_0 derart bestimmt, dass

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$
$$a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$$

wird; denn in den neuen Variabeln ξ, η lautet dann die Gleichung so wie vorhin. Der Sinn dieser Transformation ist der, dass das Curvensystem jetzt nicht in Bezug auf den Ursprung, sondern in Bezug auf den Punkt x_0/y_0 perspectivische Umformung zulässt.

Eine derartige Bestimmung von x_0, y_0 ist aber nur möglich, wenn

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \lessgtr 0$$

ist; findet hingegen $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} (= k)$ statt, so kann für die obige Gleichung

$$(ax + by + c)dx + [k(ax + by) + c']dy = 0$$

geschrieben werden, und werden jetzt x und $ax + by = v$ als Variable eingeführt, so ist die Trennung möglich; man hat nämlich

$$b(v + c)dx + (kv + c')(dv - a\,dx) = 0$$

und hieraus

$$dx + \frac{(kv + c')dv}{(b - ak)v + bc - ac'} = 0.$$

2) Es sind Curven zu bestimmen, bei welchen die Ursprungsordinate der Tangente eine homogene lineare Function der Coordinaten des Berührungspunktes ist.

Die Differentialgleichung

$$y - xy' = ax + by$$

dieser Curven kann auf die Form

$$[ax + (b-1)y]dx + xdy = 0$$

gebracht werden, welche im vorangehenden Beispiele behandelt worden ist. Das allgemeine Integral

$$l.x + \int \frac{du}{a+bu} = l.c$$

in seiner endgiltigen Gestalt

$$x^{b-1}(ax+by) = C$$

bestimmt bei rationalem b ein System algebraischer Curven. Für $ax + by \equiv x + y$ ist es das Parallelstrahlenbüschel

$$x + y = C,$$

für $ax + by \equiv y - x$ das Parallelstrahlenbüschel

$$y - x = C;$$

für $ax + by \equiv x - y$ hat man

$$x - y = Cx^2,$$

also ein Büschel durch den Ursprung gehender Parabeln, deren Axen der y-Axe parallel sind und deren Brennpunkte in der x-Axe liegen.

3) Es sind Curven zu bestimmen, bei welchen die Tangente mit der Abscissenaxe einen doppelt so grossen Winkel bildet, als der aus dem Ursprunge nach dem Berührungspunkte gezogene Strahl.

Mit Bezugnahme auf Fig. 168 soll also $\alpha = 2\varphi$, also auch

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi},$$

d. h.

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

sein. Die Einführung von $\frac{y}{x} = u$ gibt

$$udx + xdu = \frac{2u}{1-u^2}dx;$$

und trennt man die Variabeln, so ist weiter

$$\frac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)} = \frac{dx}{x};$$

setzt man $1+u^2-2u^2$ für $1-u^2$, so wird nach vollzogener Integration

$$l.u - l.(1+u^2) + l.C = l.x;$$

durch Übergang zu den Zahlen und Restitution des Wertes für u ergibt sich schliesslich

$$x^2 + y^2 = Cy.$$

Die gesuchten Linien sind also die Individuen eines die x-Axe im Ursprunge berührenden Kreisbüschels.

4) Es sind Curven zu bestimmen, bei welchen der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe gleich ist dem nach dem Berührungspunkte aus dem Ursprunge geführten Leitstrahle.

Aus der Gleichung $\eta - y = y'(\xi - x)$ der Tangente ergibt sich deren Ordinate im Ursprunge $y - xy'$; demnach lautet die Differentialgleichung der gesuchten Curven

$$y - xy' = \sqrt{x^2+y^2};$$

daraus folgt

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

und für $\frac{y}{x} = u$ weiter

$$u + x\frac{du}{dx} = u - \sqrt{1+u^2},$$

woraus

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = 0$$

und in weiterer Folge

$$l.x + l.(u + \sqrt{1+u^2}) = l.C$$

$$x(u + \sqrt{1+u^2}) = C$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = C;$$

nach Beseitigung der Irrationalität hat man

$$x^2 = -2Cy + C^2$$

und erkennt, dass die verlangten Curven confocale Parabeln sind, deren gemeinsamer Brennpunkt der Ursprung und deren Axe die y-Axe ist.

310. Wenn eine Differentialgleichung der ersten Ordnung und ersten Grades in der Form

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{1}$$

wo M, N im Allgemeinen Functionen von x, y bedeuten, geschrieben ist, so liegt es nahe, zu fragen, ob nicht die linke Seite das unveränderte Resultat der Differentiation einer gewissen Function darstelle; wäre dem so und u diese Function, so könnte statt (1) kurz

$$du = 0$$

geschrieben werden; das aber findet für *beliebige* Werte von x, y nur statt, wenn

$$u = C; \tag{2}$$

damit hätte man das allgemeine Integral von (1) gefunden.

Da aber in solchem Falle

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}$$

sein muss, so folgt, dass nothwendig

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3}$$

ist, weil beide Differentialquotienten der Ausdruck für $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ sind.

Nur wenn also die Bedingung (3) erfüllt ist, ist die linke Seite der Gleichung (1) ein „exactes Differential“; die Gleichung selbst heisst dann eine *exacte Differentialgleichung.*

Das Vorhandensein der Bedingung (3) vorausgesetzt, kann die Function u und dadurch das allgemeine Integral auf folgende Weise bestimmt werden.

Da Mdx das partielle Differential von u in Bezug auf x vorstellt, so wird u durch Integration von Mdx in Bezug auf x erhalten bis auf einen von y allein abhängigen Theil, sodass man setzen darf

$$u = \int Mdx + Y,$$

wobei die Integration so zu geschehen hat, als ob y constant wäre. Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich aber

$$du = Mdx + Ndy = Mdx + \left[\frac{\partial \int Mdx}{\partial y} + \frac{dY}{dy}\right] dy$$

und daraus schliesst man, dass

$$N = \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y} + \frac{dY}{dy},$$

woraus

$$Y = \int \left(N - \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y} \right) dy;$$

mithin ist

$$u = \int M\,dx + \int N\,dy - \int \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y}\,dy.$$

Wäre man von $N\,dy$ als dem partiellen Differentiale nach y ausgegangen, so hätte sich ergeben

$$u = \int M\,dx + \int N\,dy - \int \frac{\partial \int N\,dy}{\partial x}\,dx.$$

Die Übereinstimmung der differirenden Theile ist eine Folge der Bedingung (3); denn es ist

$$\int \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y}\,dy = \iint \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy,$$

$$\int \frac{\partial \int N\,dy}{\partial x}\,dx = \iint \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Das Integral von (1) kann also in einer der Gestalten

$$(4) \qquad \begin{cases} \int M\,dx + \int N\,dy - \int \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y}\,dy = C \\ \int M\,dx + \int N\,dy - \int \frac{\partial \int N\,dy}{\partial x}\,dx = C \end{cases}$$

geschrieben werden.

311. *Beispiele.* 1) Die Differentialgleichung

$$x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

ist exact, weil

$$\frac{\partial[x(x + 2y)]}{\partial y} = 2x = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x}.$$

Nun ist

$$\int x(x + 2y)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 y$$

$$\int (x^2 - y^2)dy = x^2 y - \frac{y^3}{3}$$

$$\frac{\partial \int x(x + 2y)dx}{\partial y} = x^2$$

$$\int \frac{\partial \int x(x + 2y)dx}{\partial y}\,dy = x^2 y;$$

demnach

$$\frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^3}{3} = \text{const.}$$

oder

$$x^3 + 3x^2 y - y^3 = C$$

das allgemeine Integral.

2) Die Gleichung

$$x(x^2 + 3y^2)dx + y(y^2 + 3x^2)dy = 0$$

erfüllt gleichfalls die Bedingung einer exacten Differentialgleichung. Sondert man Glieder von der Form Xdx, Ydy, die exacte Differentiale sind, ab, so muss dann nothwendig der erübrigende Theil die Bedingung wieder erfüllen; in der That ist dies bei

$$x^3 dx + y^3 dy + 3(xy^2 dx + x^2 y dy) = 0$$

der Fall. Und da man hier die Function, von welcher $xy^2 dx + x^2 y dy$ das Differential ist, unmittelbar erkennt — es ist dies $\frac{1}{2} x^2 y^2$, — so kann man das allgemeine Integral sofort hinstellen:

$$\frac{x^4 + y^4}{4} + \frac{3}{2} x^2 y^2 = \text{const.}$$

oder

$$x^4 + y^4 + 6x^2 y^2 = C.$$

312. Wenn die Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

die Bedingung $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ nicht erfüllt, so muss doch ihr allgemeines Integral, dem man die Gestalt

$$u = C \tag{2}$$

geben kann, so beschaffen sein, dass die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 \tag{3}$$

mit (1) dem Wesen nach übereinstimmt, d. h. dass beide für jede Wertverbindung x/y denselben Wert für $\frac{dy}{dx}$ ergeben, also ein und dasselbe System von Linienelementen definiren. Dies ist nur dann der Fall, wenn die linke Seite in (3) sich von der linken Seite in (1) nur um einen nicht identisch, d. h.

für alle Wertverbindungen von x, y verschwindenden Factor sich unterscheidet, sodass

(4) $$\mu(Mdx + Ndy) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du.$$

Ein solcher Factor μ, welcher die linke Seite von (1) in ein exactes Differential verwandelt, wird ein *integrirender Factor* der Gleichung (1) genannt, weil nach Auffindung eines solchen die Gleichung nach dem in **310** entwickelten Vorgange integrirt werden kann.

Neben μ ist aber jeder Ausdruck von der Form $\mu\varphi(u)$, *aber auch nur ein solcher*, integrirender Factor von (1), weil vermöge (4) auch

$$\mu\varphi(u)(Mdx + Ndy) = \varphi(u)du$$

ein exactes Differential ist; durch Integration dieses letzteren entsteht eine Function $\Phi(u)$, und die Gleichung

(5) $$\Phi(u) = C$$

sagt im Wesen dasselbe aus wie die Gleichung

$$u = C,$$

sodass auch sie das allgemeine Integral bilden kann.

Sind also zwei integrirende Factoren einer Differentialgleichung bekannt, so kann der eine durch μ, der andere durch $\mu\varphi(u)$ bezeichnet werden; ihr Quotient $\varphi(u)$, einer willkürlichen Constanten gleichgesetzt, gibt eine Gleichung von der Gestalt (5). Mithin hat die Kenntnis zweier integrirenden Factoren einer Differentialgleichung die Kenntnis ihres allgemeinen Integrals zur Folge.

Als eine Methode von grosser Anwendbarkeit kann die Integration mittels des integrirenden Factors nicht bezeichnet werden; denn die Aufgabe, zu einer vorgelegten Differentialgleichung einen integrirenden Factor zu bestimmen, ist in der Regel ein schwierigeres Problem als die Integration der Gleichung selbst. Dem Artikel **310** zufolge hat nämlich der integrirende Factor der Bedingung

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

also der *partiellen Differentialgleichung*

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

zu genügen; und die Lösung einer solchen führt, wie an späterer Stelle (356) gezeigt werden wird, auf *zwei* gewöhnliche Differentialgleichungen zurück.

313. *Beispiele.* 1) Die Differentialgleichung

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

ist nicht exact; es ist aber leicht, integrirende Factoren für dieselbe anzugeben. Ein solcher ist schon $\frac{1}{xy}$, weil er die Trennung der Variabeln bewerkstelligt und die linke Seite in das Differential von $l.\frac{x}{y}$ verwandelt; aber auch $\frac{1}{y^2}$ und $\frac{1}{x^2}$ sind integrirende Factoren, weil sie die linke Seite in das Differential von $\frac{x}{y}$, respective von $-\frac{y}{x}$ verwandeln.

Jede zwei der drei Factoren

$$\frac{1}{xy},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{x^2}$$

geben zum Quotienten eine Function von $\frac{y}{x}$, weshalb

$$\frac{y}{x} = C$$

das allgemeine Integral jener Gleichung in seiner einfachsten Form ist.

2) Auch die Differentialgleichung

$$(y - x)dy + y\,dx = 0$$

ist nicht exact; sondert man von dem exacten Theile $y\,dy$ den nicht exacten $y\,dx - x\,dy$ ab, so kann für diesen allein jeder der vorhin angegebenen Factoren $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$ verwendet werden; für die ganze Gleichung aber nur der letzte, weil er von y allein abhängt; er verwandelt die linke Seite in das Differential von $l.y + \frac{x}{y}$, mithin ist

$$l.y + \frac{x}{y} = C$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

314. Eine Differentialgleichung, welche in Bezug auf die zu bestimmende Function und ihren Differentialquotienten vom ersten Grade ist und auch das Product der beiden nicht ent-

hält, heisst eine *lineare Differentialgleichung*. Ihre allgemeine Form ist demnach

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{1}$$

wenn P, Q Functionen von x allein bezeichnen.

Nach Multiplication mit dx ist also der Theil Qdx exact, der nicht exacte Theil

$$dy + Py\,dx$$

hat aber augenscheinlich den integrirenden Factor $\frac{1}{y}$, weil durch dessen Anwendung die Variabeln getrennt werden und der Ausdruck sich in das exacte Differential von

$$l.y + \int P dx$$

verwandelt; die Differentialgleichung

$$dy + Py\,dx = 0$$

wird also durch

$$y = e^{-\int P dx}$$

befriedigt, ihr integrirender Factor

$$\frac{1}{y} = e^{\int P dx}$$

ist, da er nur von x abhängt, auch ein Factor der ganzen Gleichung.

Durch Anwendung desselben verwandelt sich (1) in

$$d\left[y e^{\int P dx}\right] = Q e^{\int P dx}$$

und daraus folgt das allgemeine Integral

$$y = e^{-\int P dx} \left\{ C + \int Q e^{\int P dx} dx \right\}. \tag{2}$$

Ohne auf den integrirenden Factor einzugehen, kann man dieses Resultat auch auf folgende Weise entwickeln. Betrachtet man y als Product zweier unbekannten Functionen u, v von x, setzt also

$$y = uv,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx},$$

so lautet die Gleichung

$$\left(\frac{du}{dx} + Pu\right) v + u \frac{dv}{dx} = Q;$$

sie reducirt sich auf

$$u\frac{dv}{dx} = Q, \tag{3}$$

wenn man u derart bestimmt, dass

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0;$$

daraus folgt durch Trennung der Variabeln

$$\frac{du}{u} + P dx = 0$$

und durch Integration

$$l.u + \int P dx = 0,$$

woraus

$$u = e^{-\int P dx}.$$

Mit dieser Bestimmung aber lautet (3)

$$dv = Q e^{\int P dx} dx,$$

woraus

$$v = C + \int Q e^{\int P dx} dx.$$

Demnach ist

$$y = uv = e^{-\int P dx}\left\{C + \int Q e^{\int P dx} dx\right\}$$

wie oben.

315. *Beispiele.* 1) Die lineare Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = ax + by + c$$

hat den integrirenden Factor

$$e^{-\int b dx} = e^{-bx};$$

multiplicirt man sie mit demselben, so erkennt man in

$$\left(\frac{dy}{dx} - by\right)e^{-bx} = (ax + c)e^{-bx}$$

die linke Seite sogleich als das Differential von ye^{-bx}; mithin ist

$$ye^{-bx} = C + \int (ax + c)e^{-bx} dx$$

und nach Ausführung der Integration

$$y = Ce^{bx} - \frac{abx + a + bc}{b^2}$$

oder in anderer Anordnung, wenn man für $b^2 C$ wieder C schreibt,

$$abx + b^2 y + a + bc = Ce^{bx}$$

das allgemeine Integral.

2) Bringt man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} y = x \sec y$$

auf die Form

$$\cos y \frac{dy}{dx} + \sin y = x,$$

so erkennt man in ihr eine lineare Differentialgleichung, aber nicht in Bezug auf y, sondern in Bezug auf $\sin y$ als abhängige Variable; man kann sie nämlich schreiben

$$\frac{d(\sin y)}{dx} + \sin y = x;$$

als solche hat sie den integrirenden Factor $e^{\int dx} = e^x$ und gibt bei Anwendung desselben

$$e^x \sin y = C + \int x e^x dx,$$

woraus schliesslich

$$\sin y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

3) Die sogenannte Bernoulli'sche Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

kann auch nicht unmittelbar als eine lineare angesprochen werden; bringt man sie aber in die Gestalt

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q,$$

so findet man, dass sie linear ist in Bezug auf $\frac{y^{1-n}}{1-n}$ als abhängige Variable, indem sie geschrieben werden kann

$$\frac{d\frac{y^{1-n}}{1-n}}{dx} + (1-n)P\frac{y^{1-n}}{1-n} = Q.$$

Unter Zugrundelegung der Formel (2) ist also

$$(4) \quad y^{1-n} = (1-n)e^{(n-1)\int P dx}\left\{C + \int Q e^{(1-n)\int P dx} dx\right\}$$

ihr allgemeines Integral.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^2y^3};$$

nicht in dieser, aber in der reciproken Gestalt

$$\frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2$$

stellt sie sich als eine Bernoulli'sche Gleichung mit der abhängigen Variabeln x dar und gibt nach dem erklärten Vorgange das Integral

$$x^{-1} = -e^{-\frac{y^2}{2}}\left\{C + \int y^3 e^{\frac{y^2}{2}} dy\right\},$$

in endgiltiger Form

$$\frac{1}{x} = 2 - y^2 - Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

316. Eine Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades, d. i. eine Gleichung von der Form

$$Ly'^2 + 2My' + N = 0, \tag{1}$$

worin L, M, N eindeutige Functionen von x, y bedeuten, definirt ein System von Linienelementen von solcher Zusammensetzung, dass durch jeden Punkt der Ebene im Allgemeinen — so weit sich nämlich reelle Lösungen für y' ergeben — zwei Elemente hindurchgehen; die Richtungscoefficienten der Geraden dieser Elemente ergeben sich durch Einsetzung der Coordinaten des Punktes in (1) und Auflösung nach y'.

Dies hat zur Folge, dass auch durch jeden Punkt der Ebene innerhalb eines bestimmten Bereiches zwei Integralcurven hindurchgehen; mit andern Worten, dass das System der Integralcurven die Ebene zweifach bedeckt. Es sind jedoch zwei verschiedene Fälle denkbar. Entweder sind es Curven derselben Natur, die sich in jedem Punkte schneiden, darstellbar durch *eine* Gleichung mit einem veränderlichen Parameter; oder es kreuzen sich in jedem Punkte zwei Curven verschiedener Natur, deren jede durch eine andere Gleichung bestimmt ist.

Wir besprechen zuerst den zweiten Fall, welcher die Ausnahme bildet. Wenn nämlich (1), nach y' aufgelöst, rationale Wurzeln liefert, wenn also $M^2 - LN$ als vollständiges Quadrat

sich darstellen lässt, dann zerfällt die Gleichung (1) in zwei Gleichungen erster Ordnung ersten Grades; jeder derselben entspricht ein die Ebene einfach bedeckendes einfach unendliches Curvensystem und die Vereinigung beider Systeme ist das Integral der Gleichung (1).

So gibt beispielsweise die Gleichung

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2)y' - xy = 0$$

die allgemeine Auflösung nach y'

$$y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \sqrt{\frac{(x^2 - y^2)^2}{4x^2y^2} + 1} = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \frac{x^2 + y^2}{2xy};$$

sie zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$y' = \frac{y}{x}, \qquad y' = -\frac{x}{y},$$

welche nach Trennung der Variabeln durch Integration ergeben

$$y = Cx, \qquad x^2 + y^2 = C';$$

das erste dieser Resultate bestimmt ein Strahlenbüschel aus dem Ursprunge, das zweite eine Schaar concentrischer Kreise aus demselben. In jedem Punkte der Ebene schneidet sich eine Linie des ersten Systems mit einer des zweiten unter rechtem Winkel; letzteres war auch schon aus der Differentialgleichung zu schliessen, wenn man sie in der Form

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2}{xy} y' - 1 = 0$$

schreibt; denn in jedem Punkte ist $y_1' \cdot y_2' = -1$. Eine Ausnahmsrolle spielt nur der Punkt 0/0, durch welchen *alle* Geraden des Büschels gehen.

In dem andern Falle, wo $M^2 - LN$ kein vollständiges Quadrat ist, heissen die Lösungen von (1)

$$y' = \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{L}, \qquad y' = \frac{-M - \sqrt{M^2 - LN}}{L};$$

jede davon kann beide vertreten, wenn man die Quadratwurzel als zweideutiges Symbol auffasst, und nur, wenn man über das Vorzeichen der Quadratwurzel eine bestimmte Festsetzung macht, bildet jede Lösung für sich eine Differentialgleichung ersten Grades. Daraus folgt, dass auch das Integral einer der Gleichungen das vollständige Integral bildet, wenn man den darin vorkommenden Symbolen die volle Allgemein-

heit beilegt. Weiter ergibt sich in diesem Falle die Thatsache, dass das allgemeine Integral, als ein die Ebene doppelt bedeckendes Curvensystem, sich wird in die Form

$$(2) \qquad PC^2 + 2QC + R = 0$$

bringen lassen, wo C die willkürliche Constante bedeutet und P, Q, R eindeutige Functionen von x, y sind.

Da durch jeden Punkt, in welchem durch (1) zwei *reelle* Richtungen bestimmt sind, auch zwei *reelle* Curven von (2) sich schneiden, mit andern Worten, da (1) und (2) gleichzeitig reelle, respective complexe Lösungen ergeben müssen, so sind die Discriminanten $M^2 - LN$, $Q^2 - PR$ stets gleich bezeichnet und verschwinden auch gleichzeitig, falls sie überhaupt Null werden.

Als erläuterndes einfaches Beispiel diene die Gleichung

$$xy'^2 = y;$$

sie gibt

$$y' = \pm \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},$$

nach Trennung der Variabeln

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} \mp \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0;$$

die Integration liefert weiter

$$\sqrt{y} \pm \sqrt{x} = \pm \sqrt{C};$$

nach Fortschaffung der zweideutigen Symbole ergibt sich

$$(x - y)^2 - 2C(x + y) + C^2 = 0,$$

und dies hat thatsächlich die Form (2). Weil die Gliedergruppe zweiten Grades ein vollständiges Quadrat bildet, so sind die Integralcurven Parabeln; sie berühren beide Coordinatenaxen in gleicher Entfernung ($= C$) vom Ursprunge. Jede Gleichung wie $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{C}$ mit bestimmten Zeichen der Wurzeln bedeutet nur einen Zweig einer Parabel.

Auch bei einer Differentialgleichung erster Ordnung n-ten Grades kommt es darauf an, ob es unter den Auflösungen nach y' auch rationale Lösungen gibt oder ob alle Lösungen irrational (im weiteren Sinne) sind; im ersten Falle zerfällt

das Integralsystem in mehrere Curvenschaaren, im zweiten ist es nur *eine* die Ebene im Allgemeinen n-fach bedeckende Curvenschaar.

317. *Beispiele.* 1) Die Gleichung

$$(x^2+1)y'^2 = 1$$

gibt die Auflösung

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

und das Integral

$$y + l.\,C = l.(x + \sqrt{x^2+1});$$

schreibt man dafür

$$Ce^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

und schafft die Quadratwurzel ab, so erscheint das allgemeine Integral in der Gestalt (2), nämlich

$$C^2 e^{2y} - 2Cxe^y - 1 = 0.$$

2) Es ist eine Curve zu bestimmen, bei welcher die begrenzte Tangente constant und $= a$ ist.

Die Differentialgleichung einer solchen Curve lautet

$$\sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2} = a$$

und gibt zunächst

$$y' = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}};$$

trennt man die Variabeln und integrirt, so erhält man zunächst

$$x + C = \int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy;$$

der Ausdruck unter dem Integralzeichen lässt aber folgende Umformung zu:

$$\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy = \frac{a^2dy}{y\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= -a\frac{d\frac{a}{y}}{\sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2-1}} - \frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}};$$

daher ist weiter

$$x + C = -a\,l.\left(\frac{a}{y} + \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2-1}\right) + \sqrt{a^2-y^2}$$

und schliesslich

$$x + C = \sqrt{a^2 - y^2} - a\, l.\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Es ist dies ein System von Curven, das bei Translationen parallel zur x-Axe unverändert bleibt, wie dies auch schon aus der Differentialgleichung hätte erschlossen werden können (305, 2)). Jede dieser Curven heisst eine *Tractorie* oder Zuglinie *der Geraden*, weil sie durch das freie Ende eines Fadens von der Länge a beschrieben wird, wenn man ihn in horizontaler Ebene so dahinzieht, dass ein am andern Ende befindlicher schwerer Punkt eine Gerade beschreibt.

3) Eine Curve zu bestimmen, bei welcher die über einer beliebigen Strecke der Abscissenaxe ruhende Fläche proportional ist dem in dieselbe Strecke sich projicirenden Bogen.

Es hat also die Curve der Gleichung

$$\int_a^x y\, dx = k \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

zu genügen, wenn a eine beliebige, aber feste Zahl und k den Proportionalitätsfactor bedeutet. Durch Differentiation nach der oberen Grenze ergibt sich

$$y = k\sqrt{1 + y'^2},$$

daraus

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1}$$

und weiter durch Trennung der Variabeln und Integration

$$\frac{x + c}{k} = l.\left(\frac{y}{k} + \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1}\right);$$

mithin ist

$$\frac{y}{k} + \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1} = e^{\frac{x+c}{k}},$$

$$\frac{y}{k} - \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1} = e^{-\frac{x+c}{k}},$$

daher schliesslich

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x+c}{k}} + e^{-\frac{x+c}{k}}\right).$$

Es ist dies eine Schaar von Kettenlinien, welche bei Verschiebung längs der Abscissenaxe, die zugleich Grundlinie ist, unverändert bleibt.

4) Eine Curve zu finden, bei welcher der von zwei beliebigen Radienvectoren begrenzte Sector proportional ist dem dazwischenliegenden Bogen.

Man hat zu dieser Bestimmung die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\varphi} r^2 d\varphi = k\int_{\alpha}^{\varphi}\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$$

und findet auf ähnlichem Wege wie vorhin zunächst

$$\varphi - c = \arccos \frac{2k}{r},$$

woraus sich durch Umkehrung

$$r = \frac{2k}{\cos(\varphi - c)}$$

ergibt. Führt man an Stelle der Polarcoordinaten rechtwinklige ein, so entsteht

$$x \cos c + y \sin c - 2k = 0,$$

woraus hervorgeht, dass alle Geraden, welche vom Ursprunge oder Pole den Abstand $2k$ besitzen, den Bedingungen der Aufgabe genügen.

5) Die asymptotischen Linien des hyperbolischen Paraboloids

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b} \qquad (ab > 0)$$

zu bestimmen.

In **209** ist nachgewiesen worden, dass die xy-Projectionen der asymptotischen Linien einer Fläche charakterisirt sind durch die Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

in welcher $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ist.

Im vorliegenden Falle lautet diese Differentialgleichung

$$\frac{b}{a}\,dx^2 - dy^2 = 0$$

und zerfällt in die beiden

$$dy - \sqrt{\frac{b}{a}}\,dx = 0, \qquad dy + \sqrt{\frac{b}{a}}\,dx = 0,$$

deren Integrale

$$y - \sqrt{\frac{b}{a}}\,x = C, \qquad y + \sqrt{\frac{b}{a}}\,x = C$$

die beiden Scharen asymptotischer Linien bestimmen. Wie im Zusammenhalte mit der Flächengleichung zu erkennen, sind die asymptotischen Linien selbst auch Gerade und fallen mit den beiden Scharen der Erzeugenden der Fläche zusammen.

318. Wenn eine Differentialgleichung beide Variabeln oder eine derselben nicht explicit enthält, so kann die Integration im erstgedachten Falle durch blosses Raisonnement, in dem andern Falle unter gewissen Voraussetzungen nach vorhergegangener *Differentiation* vollzogen werden.

I. Eine Differentialgleichung, welche y' allein (ausser Constanten) enthält, also die allgemeine Form

$$f(y') = 0 \tag{1}$$

besitzt, definirt Linienelemente von bestimmten durch (1) gegebenen Richtungen, deren durch jeden Punkt der Ebene so viele gehen, als (1) reelle Lösungen nach y' hat. Wenn demnach $y' = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung (1) ist, so ist jede Gerade

$$y = \alpha x + C$$

ein Integral der Gleichung; das allgemeine Integral setzt sich also aus Systemen paralleler Geraden zusammen und kann durch

$$f\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0 \tag{2}$$

dargestellt werden.

II. Enthält die Gleichung y nicht, lautet sie also

$$f(x, p) = 0 \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right), \tag{3}$$

so bedarf der Fall, wo sie sich in Bezug auf p lösen lässt, keiner weiteren Erläuterung. Kann sie dagegen nach x gelöst, also in die Form

$$x = \varphi(p) \tag{3*}$$

gebracht werden, so differentiire man sie und ersetze dx durch das gleichwertige $\frac{dy}{p}$; dadurch entsteht

$$dy = p\varphi'(p)\,dp$$

und durch Integration weiter

$$y + C = \int p\varphi'(p)\,dp. \tag{4}$$

Nach vollzogener Integration eliminire man p zwischen (4) und (3*); sollte sich die Elimination nicht einfach vollziehen lassen, so kann man (3*) und (4) zusammen als (parametrische) Darstellung des allgemeinen Integrals ansehen.

III. Erscheint x in der Gleichung nicht explicit, so suche man

$$f(y, p) = 0, \tag{5}$$

wenn es sich nicht nach p leicht auflösen lässt, nach y zu lösen:

$$y = \psi(p), \tag{5*}$$

differentiire und ersetze dy durch das gleichwertige pdx; nach Trennung der Variabeln und Integration erhält man dann

$$x + C = \int \frac{\psi'(p)dp}{p} \tag{6}$$

und hat schliesslich zwischen (5*), (6) p zu eliminiren.

IV. Einen ähnlichen Weg kann man einschlagen, wenn eine Differentialgleichung, die beide Variabeln enthält, wie

$$f(x, y, p) = 0, \tag{7}$$

nach einer derselben sich lösen lässt. Aus dieser Lösung

$$x = \varphi(y, p) \quad \text{respective} \quad y = \psi(x, p) \tag{7*}$$

ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp \text{ respective } pdx = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial p} dp; \tag{8}$$

in beiden Fällen hat man es mit einer Differentialgleichung erster Ordnung zu thun; ist ihr Integral gefunden, das die allgemeine Form

$$\Phi(y, p, C) = 0 \quad \text{respective} \quad \Psi(x, p, C) = 0 \tag{9}$$

haben wird, so bleibt noch die Elimination von p zwischen (7*) und (9) zu vollziehen übrig.

319. *Beispiele.* 1) Eine Curve zu finden, von welcher jeder Bogen bei seiner Rotation um die x-Axe eine Oberfläche beschreibt, die proportional ist der durch jenen Bogen, die Ordinaten seiner Endpunkte und die Abscissenaxe begrenzten Fläche.

Die Curve hat also die Bedingung

$$2\pi\int_a^x y\,ds = k\int_a^x y\,dx$$

oder die Gleichung

$$2\pi y\,ds = k y\,dx$$

zu erfüllen. Diese wird, ausser durch $y = 0$, befriedigt durch

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{k}{2\pi},$$

woraus sich

$$\sqrt{1+\left(\frac{y-C}{x}\right)^2} = \frac{k}{2\pi}$$

als allgemeines Integral ergibt. Hiernach bilden die beiden Systeme paralleler Geraden

$$y = x\sqrt{\frac{k^2}{4\pi^2}-1} + C$$

die Lösung der Aufgabe; dieselben sind nur dann reell, wenn $|k| \geqq 2\pi$.

2) Um die Gleichung

$$3y = 2p^3 + 3p^2$$

zu integriren, differentiire man dieselbe; man erhält nach Unterdrückung des Factors $3p$

$$dx = 2(p+1)dp$$

und durch Integration

$$x + c = p^2 + 2p.$$

Eliminirt man zwischen dieser und der gegebenen Gleichung zuerst p^3, so entsteht

$$p^2 - 2p(x+c) + 3y = 0;$$

Elimination von p^2 zwischen den beiden letzten Gleichungen gibt

$$2p(x+c+1) = x + c + 3y,$$

woraus

$$p = \frac{x+c+3y}{2(x+c+1)};$$

setzt man dies in die drittvorhergehende Gleichung und ordnet nach $x + c$, so erhält man das allgemeine Integral

$$4(x+c)^3 + 3(x+c)^2 - 18(x+c)y - 9y^2 - 12y = 0.$$

3) Um die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x^2 + y^2$$

zu integriren, löse man sie nach y auf und erhält

$$y = x + \sqrt{p},$$

daraus durch Differentiation

$$p\,dx = dx + \frac{dp}{2\sqrt{p}}$$

und durch Trennung der Variabeln

$$dx = \frac{dp}{2(p-1)\sqrt{p}};$$

folglich ist

$$x + C = \frac{1}{2}\, l.\, \frac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1},$$

daraus, wenn $e^{2C} = c$ gesetzt wird,

$$\frac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1} = ce^{2x}$$

und

$$\sqrt{p} = \frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}};$$

setzt man dies in die aufgelöste Gleichung ein, so ergibt sich das allgemeine Integral

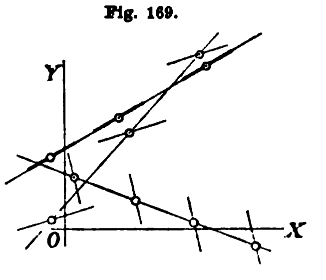
$$y = x + \frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}}.$$

320. Zu den Differentialgleichungen, welche nach voraufgegangener Differentiation integrirt werden können, gehören auch *die in x, y linearen Differentialgleichungen*

(1) $$y = x\varphi(p) + f(p) \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

Eine solche Differentialgleichung definirt ein System von Linienelementen solcher Art, dass die Punkte paralleler Elemente auf einer Geraden liegen, Fig. 169; denn für jeden besondern Wert von p stellt (1) eine Gerade dar vom Richtungscoefficienten $\varphi(p)$ und vom Axenabschnitte $f(p)$. Im Allgemeinen ist die Richtung der Linienelemente von jener der Geraden verschieden, auf welcher die Punkte liegen; fallen aber die Richtungen zusammen, ist also

Fig. 169.



$$\varphi(p) = p, \tag{2}$$

so ist die betreffende Gerade auch eine Integralcurve der Gleichung (1). Es hat also die Gleichung (1) unter ihren Integrallinien so viele Gerade, als die Gleichung (2) reelle Lösungen für p besitzt.

Zum Zwecke der Gewinnung des allgemeinen Integrals differentiire man die Gleichung (1) und ersetze dy durch $p\,dx$; dadurch entsteht

$$p\,dx = \varphi(p)\,dx + [x\varphi'(p) + f'(p)]\,dp.$$

Dies, auf die Form

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,x = \frac{f'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{3}$$

gebracht, bildet aber eine lineare Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln p und der abhängigen x; ist dieselbe gelöst und

$$F(x, p, C) = 0 \tag{4}$$

ihr allgemeines Integral, so bleibt noch die Elimination von p zwischen (4) und (1) übrig.

Bemerkenswert ist, dass die Gleichung (3) gerade für die aus (2) resultirenden Lösungen illusorisch wird, dass diese also im Allgemeinen *ausserhalb des allgemeinen Integrals* bestehen.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$yp^2 + 2xp - y = 0,$$

in der Form

$$y = \frac{2p}{1 - p^2}\,x$$

geschrieben, führt bei der eben erklärten Behandlung auf die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p(1 - p^2)} = 0,$$

in welcher sich aber die Variabeln unmittelbar trennen lassen; man erhält darnach durch Integration

$$\frac{p^2 x}{1 - p^2} = C.$$

Eliminirt man zwischen dieser und der gegebenen Gleichung p, so ergibt sich

$$y^2 = 4Cx + 4C^2$$

oder mit $C = \frac{c}{2}$

$$y^2 = 2cx + c^2$$

als allgemeines Integral, das ein System confocaler Parabeln um den Ursprung als gemeinsamen Brennpunkt darstellt.

Da aus der Gleichung

$$\frac{2p}{1 - p^2} = p$$

$p = 0$ als einzige reelle Lösung sich ergibt, so gehört auch die Gerade

$$y = 0$$

zu den Integrallinien; dieselbe ist aber insofern ein besonderer Fall des allgemeinen, also ein particuläres Integral, als sie sich aus letzterem für $C = 0$ ergibt.

321. Ein besonderer Fall der in x, y linearen Differentialgleichung ist die *Clairaut'sche Gleichung*

$$y = xp + f(p); \tag{5}$$

bei dieser ist, wenn man sie mit der allgemeinen Form (1) vergleicht, die Bedingung (2) identisch erfüllt; es sind also auch *alle* durch (5) für verschiedene Werte von p bestimmten Geraden Integralcurven von (5), folglich das Geradensystem

$$y = Cx + f(C) \tag{6}$$

zugleich das allgemeine Integral, Fig. 170.

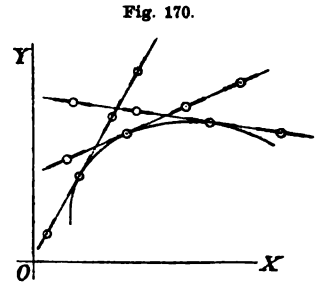


Fig. 170.

Hat das Geradensystem eine Einhüllende, so ist diese gleichfalls Integralcurve; denn ihre Tangenten mit den Berührungspunkten bilden Linienelemente, die zu den durch (5) definirten Elementen gehören. Man erhält die Einhüllende, indem man (6) in Bezug auf C differentiirt und zwischen der so entstandenen Gleichung

$$0 = x + f'(C) \tag{7}$$

und der Gleichung (6) C eliminirt.

Zu diesen Resultaten gelangt man auf analytischem Wege

in folgender Weise. Wird (5) differentiirt und $dy = pdx$ gesetzt, so ergibt sich

$$pdx = pdx + [x + f'(p)]dp,$$

also

$$[x + f'(p)]dp = 0. \tag{8}$$

Dies zerfällt aber in die beiden Gleichungen

$$dp = 0,$$

$$x + f'(p) = 0;$$

die erste hat $p = C$ zur Folge und führt auf das allgemeine Integral (6); aber auch durch Elimination von p zwischen der zweiten dieser Gleichungen und (5) ergibt sich eine Lösung; diese fällt jedoch zusammen mit jener Gleichung, welche aus (6) und (7) durch Elimination von C resultirt und die Einhüllende des durch die allgemeine Lösung vorgestellten Geradensystems bestimmt.

Die Clairaut'sche Gleichung bildet den analytischen Ausdruck für eine Tangenteneigenschaft einer ebenen Curve, welche sich nur auf die Richtung der Tangente und nicht auch auf die Lage des Berührungspunktes in ihr bezieht. Ist nämlich den Tangenten einer Curve eine Bedingung auferlegt, so wird sich diese im Allgemeinen analytisch in der Weise darstellen lassen, dass der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe einer Function der Coordinaten ihres Berührungspunktes und ihres Richtungscoefficienten gleichzukommen hat. Dieser Abschnitt hat aber vermöge der Gleichung

$$\eta - y = p(\xi - x)$$

der Tangente den Wert $y - px$; folglich kann

$$y - px = f(x, y, p)$$

als der allgemeine Ausdruck einer Tangenteneigenschaft angesehen werden. Hängt nun die Tangenteneigenschaft nur von der Richtung der Tangente ab, so nimmt die Gleichung die einfachere Form

$$y - px = f(p)$$

an, und dies fällt mit der Clairaut'schen Gleichung (5) überein.

Wird z. B. um die Curve gefragt, bei welcher die Tan-

gente mit dem aus dem Ursprunge nach dem Berührungspunkte gezogenen Strahle einen constanten Winkel θ einschliesst, so handelt es sich um eine Tangenteneigenschaft, bei welcher die Lage des Berührungspunktes in der Tangente von Einfluss ist; die Bedingung der Aufgabe liefert den Ansatz

$$\frac{\frac{y}{x} - p}{1 + \frac{y}{x} p} = \operatorname{tg} \theta = k,$$

und daraus folgt

$$y - px = k(x + yp),$$

d. h. der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe ist von x, y und p abhängig.

Stellt man dagegen die Frage nach einer Curve, deren Tangenten vom Ursprunge einen gegebenen Abstand a haben, so ist dies eine Tangenteneigenschaft, bei der es auf die Lage des Berührungspunktes in der Tangente nicht ankommt; mittels der allgemeinen Gleichung der Tangente

$$\eta = p\xi + y - xp$$

drückt sich die Bedingung des Problems durch

$$\frac{y - px}{\sqrt{p^2 + 1}} = a$$

aus und gibt

$$y - px = a\sqrt{p^2 + 1},$$

d. h. für den Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe einen von p allein abhängigen Wert.

322. *Beispiele.* 1) Es sind jene Curven zu bestimmen, welchen die Eigenschaft zukommt, dass die von zwei gegebenen festen Punkten auf ihre Tangenten gefällten Lothe a) eine constante Summe s; b) eine constante Differenz δ; c) ein constantes Product B; d) ein constantes Verhältnis λ bilden.

Ordnet man das Coordinatensystem so an, dass die Abscissenaxe durch die gegebenen festen Punkte geht und der Ursprung die Entfernung $2c$ dieser Punkte halbirt, dann haben die von den Punkten $c/0$ und $-c/0$ auf die Tangente

$$\eta - y = p(\xi - x)$$

eines Punktes x/y der gesuchten Curve gefällten Lothe die Längen

$$\frac{y - px + cp}{\sqrt{p^2+1}}, \qquad \frac{y - px - cp}{\sqrt{p^2+1}}.$$

a) Aus

$$\frac{y - px + cp}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{y - px - cp}{\sqrt{p^2+1}} = s$$

folgt die Clairaut'sche Gleichung

$$y = px + \frac{s}{2}\sqrt{p^2+1};$$

ausser den Geraden des Systems

$$y = Cx + \frac{s}{2}\sqrt{C^2+1}$$

genügt den Bedingungen der Aufgabe auch die Einhüllende desselben, welche sich durch Elimination von C zwischen dieser Gleichung und

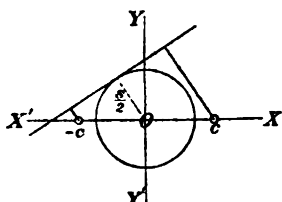


Fig. 171.

$$0 = x + \frac{Cs}{2\sqrt{C^2+1}}$$

ergibt; es ist dies der Kreis (Fig. 171)

$$x^2 + y^2 = \frac{s^2}{4}.$$

b) Die zweite Frage führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{2cp}{\sqrt{p^2+1}} = \delta,$$

woraus $p = \pm \frac{\delta}{\sqrt{4c^2 - \delta^2}}$; das allgemeine Integral

$$y = \pm \frac{\delta}{\sqrt{4c^2 - \delta^2}}\, x + C$$

stellt zwei Systeme paralleler Geraden dar, welche reell sind nur, wenn $4c^2 \geqq \delta^2$.

c) Die auf den dritten Fall bezügliche Differentialgleichung

$$\frac{(y - xp)^2 - c^2p^2}{p^2+1} = B$$

lässt sich auf die Clairaut'sche Form bringen, indem

$$y = xp + \sqrt{(c^2 + B)p^2 + B}$$

ist; das allgemeine Integral besteht aus Geraden, den Tangenten der gesuchten Curve; diese selbst wird durch Elimination von p zwischen der letzten Gleichung und

$$0 = x + \frac{(c^2 + B)p}{\sqrt{(c^2 + B)p^2 + B}}$$

gefunden. Die Auflösung dieser Gleichungen nach x, y gibt

$$x = -\frac{(c^2 + B)p}{\sqrt{(c^2 + B)p^2 + B}}$$
$$y = \frac{B}{\sqrt{(c^2 + B)p^2 + B}}$$

und daraus folgt ohneweiters

$$\frac{x^2}{c^2 + B} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Die Curve ist eine Ellipse oder Hyperbel mit den festen Punkten als Brennpunkten, jenachdem B positiv oder negativ (und gleichzeitig $c^2 + B > 0$) ist.

d) Die dem vierten Falle entsprechende Gleichung

$$\frac{y - px + cp}{y - px - cp} = \lambda$$

ist eine Clairaut'sche, weil sie auf die Form

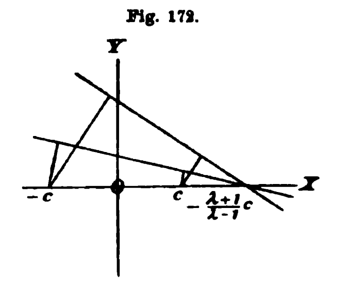
$$y = xp + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} cp$$

gebracht werden kann; ihr allgemeines Integral

$$y = C\left(x + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} c\right)$$

repräsentirt ein Strahlenbüschel mit dem Centrum $-\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} c/0$, und dieses Centrum, das die Strecke zwischen den festen Punkten äusserlich oder innerlich theilt, jenachdem λ positiv oder negativ ist, bildet zugleich die Einhüllende des Integralsystems, Fig. 172.

Fig. 172.



2) Es sind die Krümmungslinien des dreiaxigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zu bestimmen.

In Artikel **206** ist die Differentialgleichung, welche die Projection der Krümmungslinien einer Fläche auf der xy-Ebene charakterisirt, gefunden worden; sie lautet

$$[(1+p^2)s - pqr]dx^2 - [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\,dx\,dy \\ - [(1+q^2)s - pqt]dy^2 = 0;$$

darin sind p, q; r, s, t die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von z. Im vorliegenden Falle ergeben sie sich aus den Gleichungen

$$\frac{x}{a^2} + \frac{zp}{c^2} = 0$$

$$\frac{y}{b^2} + \frac{zq}{c^2} = 0$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2} + \frac{zr}{c^2} = 0$$

$$\frac{pq}{c^2} + \frac{zs}{c^2} = 0$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2} + \frac{zt}{c^2} = 0$$

und haben die Werte

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z}, \qquad q = -\frac{c^2y}{b^2z};$$

$$r = \frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right), \quad s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad t = \frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Setzt man dieselben in die obige Differentialgleichung ein, so ergibt sich nach entsprechender Reduction

$$\frac{b^2-c^2}{b^2}xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2-c^2}{b^2}y^2 - (a^2-b^2)\right]\frac{dy}{dx} \\ - \frac{a^2-c^2}{a^2}xy = 0,$$

und nachdem man durch $\frac{a^2-c^2}{a^2}$ dividirt und zur Abkürzung

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} = A, \qquad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2} = B$$

gesetzt hat, weiter

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Führt man an Stelle von x, y neue Variable X, Y ein, indem man setzt

$$x^2 = X \qquad \frac{dY}{dX} = P,$$
$$y^2 = Y$$

so entsteht zunächst

$$AXP^2 + (X - AY - B)P - Y = 0,$$

daraus durch Zusammenfassung

$$(AP + 1)(XP - Y) - PB = 0$$

und schliesslich die Clairaut'sche Gleichung

$$Y = XP - \frac{BP}{AP + 1}.$$

Ihr allgemeines Integral

$$Y = CX - \frac{BC}{AC + 1}$$

gibt, wenn man auf die ursprünglichen Variabeln zurückgreift, die allgemeine Lösung der vorliegenden Aufgabe

$$y^2 = Cx^2 - \frac{BC}{AC + 1}.$$

Die Krümmungslinien projiciren sich demnach auf der xy-Ebene in ein System von coaxialen Kegelschnittslinien, und zwar die eine Schar in Ellipsen ($C < 0$), die andere Schar in Hyperbeln ($C > 0$).

§ 3. Singuläre Lösungen.

328. Die zuletzt behandelte Clairaut'sche Gleichung bot eine eigenthümliche Erscheinung dar: neben dem *allgemeinen* Integrale, das ein System von geraden Linien darstellt, wurde eine zweite Lösung gefunden, welche der Einhüllenden jenes Geradensystems entspricht.

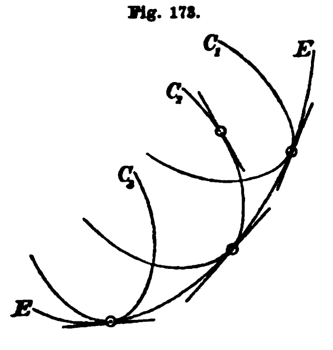
Dies ist jedoch nur der einfachste Fall einer allgemeinen Thatsache, welche sich in folgendem Satze ausspricht: *Hat das System der Integralcurven einer Differentialgleichung erster Ordnung eine Einhüllende, so ist diese auch eine Lösung der Gleichung.*

Denn jede Tangente einer Integralcurve mit ihrem Berührungspunkte zusammengefasst bildet ein Linienelement, das der Differentialgleichung genügt; folglich genügen ihr auch die Tangenten der Einhüllenden mit ihren Berührungspunk-

ten, weil sie zu den Elementen der Integralcurven gehören, Fig. 173.

Eine Lösung von der betrachteten Art, welche ausserhalb des allgemeinen Integrals besteht in dem Sinne, dass sie sich aus demselben nicht durch Specialisirung der Integrationsconstanten ableiten lässt, nennt man eine *singuläre Lösung* der Gleichung.

Fig. 173.



Um sie aus dem allgemeinen Integrale

(1) $$F(x, y, C) = 0$$

zu finden, hat man auf dieses das Verfahren zur Bestimmung der Einhüllenden anzuwenden, welches (161) darin besteht, dass man zwischen (1) und

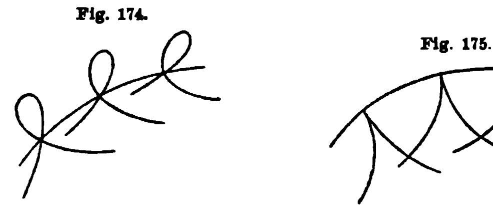
(2) $$\frac{\partial F}{\partial C} = 0$$

C eliminirt; das Resultat dieser Elimination sei die Gleichung

(3) $$\Phi(x, y) = 0.$$

In allgemeinster Auffassung bedeutet diese Gleichung den Ort solcher Punkte der Ebene, durch welche mindestens zwei Curven des Systems (1) mit gleichem Parameterwerte C hindurchgehen. Das können aber ausser Punkten der Einhüllenden auch mehrfache Punkte, insbesondere Knotenpunkte und Spitzen der Integralcurven, sein. Besitzen nämlich die Integralcurven Knotenpunkte, Fig. 174, oder Spitzen, Fig. 175, so ist

Fig. 174. Fig. 175.



der Ort derselben eine Curve, die in dem durch (3) bestimmten Gebilde enthalten sein muss, die aber der Differentialgleichung im Allgemeinen nicht genügt, weil ihre Linienelemente verschieden sind von denen der Integralcurven.

Man hat daher die Gleichung (3) oder die einzelnen Gleichungen, in welche sie etwa zerfällt, darauf zu prüfen, ob durch sie der vorgelegten Differentialgleichung genügt wird; nur wenn dies der Fall, hat man es mit einer singulären Lösung zu thun; im andern Falle mit einem *Orte von Knotenpunkten* oder *Spitzen.*

Der Ausdruck $\Phi(x, y)$ ist die in Bezug auf C gebildete Discriminante von (1). Im Falle also das allgemeine Integral quadratisch ist in C, wie

(4) $$PC^2 + 2QC + R = 0,$$

so ergibt sich eine etwa vorhandene singuläre Lösung durch Annullirung von $Q^2 - PR$ oder eines Factors dieses Ausdruckes.

Ändert $Q^2 - PR$ bei dem Durchgange durch Null sein Zeichen, so zeigt dies an, dass das Curvensystem (4) die Ebene zu einer Seite der Curve

(5) $$Q^2 - PR = 0$$

doppelt, zur andern Seite nicht bedeckt; (5) kann unter solchen Umständen entweder Einhüllende oder Ort von Spitzen sein.

Behält dagegen $Q^2 - PR$, wenn es nicht verschwindet, beständig das positive Vorzeichen bei, so zeigt dies an, dass das System (4) die Ebene überall doppelt bedeckt, und dann kann (5) nur den Ort von Doppelpunkten darstellen.

Was von $Q^2 - PR$ gesagt worden, gilt auch von einem Factor der Discriminante.

324. Jeder Punkt der Einhüllenden eines Curvensystems ist als gemeinsamer Punkt zweier unendlich benachbarten oder vereinigt liegenden Curven des Systems aufzufassen, in welchem auch die Tangenten der beiden Curven zusammenfallen.

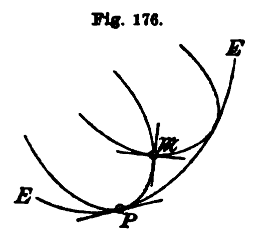
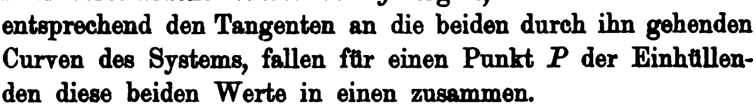


Fig. 176.

Während nämlich die Differentialgleichung

(6) $$Ly'^2 + 2My' + N = 0$$

für einen Punkt von der Lage 𝔐, Fig. 176, zwei verschiedene Werte von y' ergibt,



entsprechend den Tangenten an die beiden durch ihn gehenden Curven des Systems, fallen für einen Punkt P der Einhüllenden diese beiden Werte in einen zusammen.

Es stellt sich hiernach die Einhüllende als ein Ort von Punkten dar, für welche die Differentialgleichung (6) oder allgemein

$$f(x, y, y') = 0 \tag{7}$$

zwei gleiche Lösungen nach y' ergibt. Ihre Gleichung erhält man also bei (6) durch Nullsetzung von $M^2 - LN$, allgemein durch Elimination von y' zwischen (7) und der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \tag{8}$$

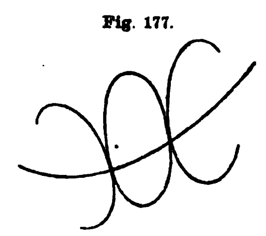
Aber das Resultat

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{9}$$

dieser Elimination bedeutet allgemein den Ort von Punkten, in welchen zwei von den durch (7) definirten Linienelementen zusammenfallen. Dies trifft nicht allein in den Punkten der Einhüllenden zu, sondern auch dort, wo die Integralcurven Spitzen aufweisen, und dort, wo sich zwei derselben berühren.

Es kann demnach die Gleichung (9) oder eine aus ihr hervorgehende Theilgleichung auch den *Ort von Spitzen* der Integralcurven (Fig. 175) oder den *Ort von Contacten* dieser Curven, Fig. 177, vorstellen, und in beiden genannten Fällen genügt sie der Differentialgleichung im Allgemeinen nicht, bildet also keine Lösung derselben.

Fig. 177.



Eine etwa vorhandene singuläre Lösung lässt sich also sowohl aus dem allgemeinen Integrale wie aus der Differentialgleichung selbst ableiten, dort durch Bildung der Discriminante in Bezug C, hier durch Bildung der Discriminante nach y'. In beiden Fällen aber muss das gefundene Resultat oder seine einzelnen Theile (hervorgegangen aus den Factoren der Discriminante) darauf geprüft werden, ob durch sie der Differentialgleichung genügt wird. Trifft dies nicht zu, dann hat man es mit einem Orte von Knoten oder Spitzen im ersten, mit einem Orte von Spitzen oder Contacten im zweiten Falle zu thun.

Liegt insbesondere eine Differentialgleichung zweiten Grades vor:

$$Ly'^2 + 2My' + N = 0$$

und ist

$$PC^2 + 2QC + R = 0$$

ihr allgemeines Integral, so müssen, soll eine singuläre Lösung vorhanden sein, $M^2 - LN$ und $Q^2 - PR$ einen gemeinsamen Factor haben. Ein solcher kann jedoch auch einem Orte von Spitzen entsprechen. Ein nicht gemeinsamer Factor, wenn er $M^2 - LN$ angehört, wird einen Ort von Knotenpunkten bedeuten, und einen Ort von Contacten, wenn er in $Q^2 - PR$ allein vorkommt.

Ändert $M^2 - LN$, indem es durch Null geht, sein Zeichen, so wird durch $M^2 - LN = 0$ entweder eine singuläre Lösung oder ein Spitzenort bestimmt sein. Behält dagegen $Q^2 - PR$ immer das positive Zeichen bei, so ist $M^2 - LN = 0$ in der Regel ein Contactort.

Was von $M^2 - LN$ gesagt worden, gilt auch von einem Factor der Discriminante.

325. *Beispiele.* 1) Die endliche Gleichung

$$(\alpha) \qquad (x - c)^2 + y^2 = r^2,$$

welche bei veränderlichem c eine (längs der x-Axe verschiebbare) Reihe gleicher Kreise, Fig. 178, darstellt, führt, wenn man c zwischen ihr und

$$x - c + yy' = 0$$

eliminirt, zu der Differentialgleichung

$$(\beta) \qquad y^2(1 + y'^2) = r^2.$$

Fig. 178.

Nach c, y' geordnet heissen die Gleichungen

$$c^2 - 2xc + x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$
$$y^2y'^2 + y^2 - r^2 = 0;$$

die Discriminante der ersten ist $r^2 - y^2$, die der zweiten $y^2(r^2 - y^2)$.

Der gemeinsame Factor $r^2 - y^2$ führt zu den beiden singulären Lösungen

$$y = -r, \qquad y = r,$$

die in der That der Differentialgleichung (β) genügen, weil sie $y' = 0$ zur Folge haben.

Die zweitgenannte Discriminante weist noch den Factor y^2 auf und dieser führt zu dem Contactorte

$$y = 0.$$

Es sei bei dieser Gelegenheit folgendes bemerkt. Wenn eine Differentialgleichung neben y' nur y enthält, folglich ein bei Translationen längs der x-Axe invariantes Curvensystem darstellt (**305**, 1)), so kann die singuläre Lösung, falls eine solche vorhanden ist, nur in Geraden bestehen, welche der x-Axe parallel sind. Man erhält sie daher, indem man in der Differentialgleichung $y' = 0$ setzt.

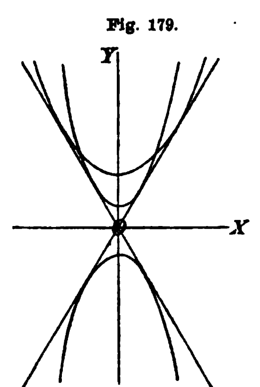
2) Die homogene Differentialgleichung

$$xy'^2 - 2yy' + ax = 0 \qquad (a > 0),$$

in Bezug auf y' aufgelöst und nach dem in **308** entwickelten Verfahren behandelt, ergibt als allgemeines Integral

$$x^2 - 2cy + ac^2 = 0.$$

Fig. 179.



Die y'-Discriminante $y^2 - ax^2$ fällt mit der c-Discriminante völlig überein; die Gleichung

$$y^2 - ax^2 = 0$$

stellt ein singuläres Integral vor, bestehend in den Geraden $y = \pm x\sqrt{a}$; denn durch $y^2 = ax^2$ und $yy' = ax$ wird die Differentialgleichung befriedigt.

Das allgemeine Integral repräsentirt ein System von Parabeln, welche die letztgenannten zwei Geraden berühren, Fig. 179.

Allgemein kann folgendes bemerkt werden. Eine homogene Differentialgleichung, da sie ein bezüglich des Ursprungs perspectivisches System definirt, kann zu singulären Lösungen nur durch den Ursprung laufende (reelle oder imaginäre) Geraden haben. Man erhält diese Geraden, wenn man in der Differentialgleichung y' durch $\frac{y}{x}$ ersetzt.

3) Die homogene Differentialgleichung

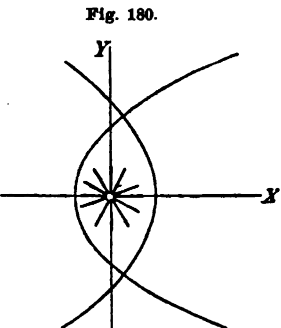
$$yy'^2 + 2xy' - y = 0$$

liefert (320) das allgemeine Integral

$$y^2 = 2cx + c^2.$$

Beide Gleichungen haben die gemeinschaftliche Discriminante $x^2 + y^2$, welche gleich Null gesetzt den Ursprung als Schnittpunkt der beiden imaginären Geraden $y = \pm ix$ ergibt; derselbe stellt eine singuläre Lösung dar, weil er die Differentialgleichung ohne Rücksicht auf den Wert von y' befriedigt. In der That, das allgemeine Integral stellt ein System confocaler Parabeln um den Ursprung als Brennpunkt dar, und es kann der Brennpunkt als Nullkreis betrachtet werden, welcher mit allen Parabeln des Systems in ideeller Doppelberührung steht.

Fig. 180.



Die vorgelegte Differentialgleichung hat also zum Integrale das System confocaler Parabeln und das System der durch den Ursprung gelegten Linienelemente, Fig. 180.

4) Um die in x, y lineare Differentialgleichung

$$y'^2 + 2xy' - y = 0$$

zu integriren, wende man das in 320 erläuterte Verfahren an; man findet zunächst x und y als Functionen von y', nämlich

$$x = \frac{c}{y'^2} - \frac{2}{3} y'$$
$$y = \frac{2c}{y'} - \frac{1}{3} y'^2,$$

und es kommt noch auf die Elimination von y' zwischen diesen oder den äquivalenten Gleichungen

$$\frac{3}{2} y'^3 + xy'^2 - c = 0$$
$$\frac{1}{3} y'^3 + yy' - 2c = 0$$

an; das Resultat derselben ergibt sich nach Sylvester's dialytischer Methode in der Form

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & x & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & x & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & x & 0 & -c \\ \frac{1}{3} & 0 & y & -2c & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & y & -2c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & y & -2c \end{vmatrix} = 0$$

und lautet geordnet

$$12cx^3 - 3x^2y^2 - 4y^3 + 18cxy + 9c^2 = 0.$$

Dies also ist das allgemeine Integral obiger Gleichung, dem ein System von Curven vierter Ordnung entspricht.

Die y'-Discriminante ist $x^2 + y$, die c-Discriminante

$$(6x^3 + 9xy)^2 + 27x^2y^2 + 36y^3 = 36(x^2 + y)^3;$$

da aber die hieraus entpringende Parabel

$$x^2 + y = 0$$

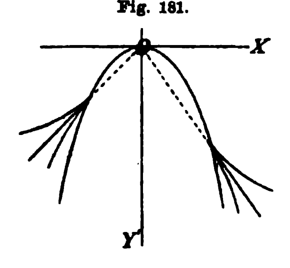


Fig. 181.

der Differentialgleichung nicht genügt, so ist sie der Ort von Spitzen der Integralcurven. Die Differentialgleichung gibt für Punkte dieser Parabel $y' = -x$ als zweifach zählende Lösung; die Tangente in einer solchen Spitze hat demnach die Gleichung

$$\eta + x^2 = -x(\xi - x)$$

oder $\eta = -x\xi$, geht somit durch den Ursprung (Fig. 181).

§ 4. Geometrische Anwendungen.

326. *Trajectorien.* Jedes Problem, das eine Curve lediglich durch eine Eigenschaft ihrer Tangenten definirt, führt auf eine Differentialgleichung erster Ordnung. Wiederholt sind im Vorangehenden solche Aufgaben gestellt und gelöst worden. Ein Problem allgemeinerer Natur, das hierher gehört, besteht in der Bestimmung der *isogonalen Trajectorien* eines vorgegebenen

einfach unendlichen Curvensystems. Man versteht darunter die Gesammtheit aller Linien, welche die gegebenen Curven unter einem festen Winkel schneiden. Ist dieser Winkel ein rechter, so spricht man von *orthogonalen Trajectorien*.

Zunächst sei das gegebene Curvensystem auf rechtwinklige Coordinaten bezogen und

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

seine Gleichung,

$$f(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

die daraus durch Elimination von c abgeleitete Differentialgleichung. Dann ist sofort

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \tag{3}$$

die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien; denn aus (2) und (3) ergeben sich bei gegebenem x/y für y' Lösungen, deren eine das negative Reciprok der andern ist; folglich schneidet die durch x/y gehende Curve des Systems (3) die durch denselben Punkt laufende Curve des Systems (2) oder (1) rechtwinklig.

Handelt es sich um isogonale Trajectorien unter dem schiefen Winkel ϑ, und bezeichnet man den Richtungscoefficienten der Tangente an die Trajectorie mit $\frac{dy}{dx}$ zum Unterschiede von jenem der gegebenen Curve, der y' heisst, dann muss

$$\frac{\frac{dy}{dx} - y'}{1 + \frac{dy}{dx} y'} = \operatorname{tg} \vartheta = k$$

sein, woraus

$$y' = \frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k \frac{dy}{dx}};$$

setzt man dies in (2) ein und schreibt wieder y' für $\frac{dy}{dx}$, so ergibt sich

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0 \tag{4}$$

als Differentialgleichung der Trajectorien unter dem Winkel $\operatorname{arctg} k$.

Ist das Curvensystem in Polarcoordinaten dargestellt und

(5) $$F(r, \varphi, c) = 0$$

seine endliche,

(6) $$f(r, \varphi, r') = 0$$

die Differentialgleichung, so gehe man davon aus, dass durch

$$\frac{r}{r'} = \operatorname{tg} \theta$$

der Winkel bestimmt ist, welchen die Tangente im Punkte r/φ an die gegebene Curve mit dem verlängerten Leitstrahle dieses Punktes bildet. Für die Trajectorie wird der analoge Winkel durch

$$\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \operatorname{tg} \theta_1$$

bestimmt sein, wenn $\frac{dr}{d\varphi}$ auf die Trajectorie sich bezieht; die Orthogonalität beider Curven erfordert, dass

$$\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta_1 + 1 = \frac{r^2}{r' \frac{dr}{d\varphi}} + 1 = 0$$

sei, woraus sich

$$r' = -\frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}}$$

ergibt. Trägt man dies in (6) ein und schreibt für $\frac{dr}{d\varphi}$ wieder kurz r', so erhält man

(7) $$f\left(r, \varphi, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0$$

als Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien.

Für schiefe Trajectorien unter dem Winkel ϑ ergibt sich in ähnlicher Weise die Differentialgleichung

(8) $$f\left(r, \varphi, \frac{kr^2 + rr'}{r - kr'}\right) = 0,$$

wenn $\operatorname{tg} \vartheta = k$ gesetzt wird.

327. *Beispiele.* 1) Die orthogonalen Trajectorien der Parabelschar

$$y = ax^n$$

(Parameter a) zu bestimmen.

Mit Hilfe von

$$y' = nax^{n-1}$$

ergibt sich

$$y' = \frac{ny}{x}$$

als Differentialgleichung der gegebenen Curvenschar und daraus

$$y' = -\frac{x}{ny}$$

als Differentialgleichung ihrer orthogonalen Trajectorien. Die Variabeln lassen sich unmittelbar trennen und die Integration liefert

$$x^2 + ny^2 = c.$$

Die Trajectorien bilden also eine Schar homothetischer Ellipsen oder Hyperbeln, jenachdem $n > 0$ oder $n < 0$.

2) Die orthogonalen Trajectorien des Kreisbüschels mit den Grundpunkten $-a/0$, $a/0$ zu bestimmen.

Aus der endlichen Gleichung dieses Kreisbüschels

$$x^2 + y^2 - 2by - a^2 = 0$$

und aus

$$x + yy' - by' = 0$$

ergibt sich durch Elimination des veränderlichen Parameters b die Differentialgleichung

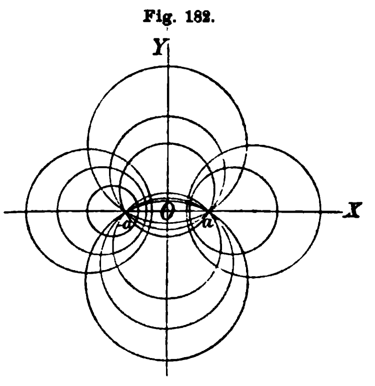
$$(\alpha) \qquad (x^2 - y^2 - a^2)dy - 2xy\,dx = 0,$$

daraus aber entspringt

$$(\beta) \qquad (x^2 - y^2 - a^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

als Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien. Ihre Integration kann man sich mit Hilfe folgender Bemerkung ersparen: Es geht die Gleichung (β) aus (α) hervor, wenn man x mit y vertauscht und das Zeichen von a^2 ändert; durch dieselben Änderungen erhält man aus der Gleichung des Kreisbüschels diejenige seiner Trajectorien, nämlich

Fig. 182.



$$x^2 + y^2 - 2cx + a^2 = 0.$$

Diese Trajectorien bilden also wieder ein Kreisbüschel, das durch die imaginären Punkte $0/-ai$ und $0/ai$ hindurchgeht, Fig. 182.

3) Es sind die orthogonalen Trajectorien eines Systems confocaler Centralkegelschnitte zu bestimmen.

Die Gleichung eines solchen Systems ist

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

mit dem veränderlichen Parameter λ: Durch ihre Differentiation ergibt sich

$$\frac{x}{\lambda^2} + \frac{yy'}{\lambda^2 - c^2} = 0;$$

daraus folgt

$$\frac{x}{\lambda^2} = \frac{yy'}{c^2 - \lambda^2} = \frac{x + yy'}{c^2},$$

sodass

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{x(x + yy')}{c^2},$$

$$\frac{y^2}{c^2 - \lambda^2} = \frac{\frac{y}{y'}(x + yy')}{c^2};$$

mithin ist

$$(x + yy')\left(x - \frac{y}{y'}\right) = c^2$$

die Differentialgleichung des vorgelegten Curvensystems. Sie bleibt dieselbe, wenn man y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzt, charakterisirt also auch das System der orthogonalen Trajectorien.

Ein System homofocaler Centralkegelschnitte und seine orthogonalen Trajectorien sind sonach durch ein und dieselbe Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

dargestellt. Die Scheidung beider wird lediglich durch das Grössenverhältnis zwischen dem variabeln λ^2 und dem festen c^2 vollzogen. Für $\lambda^2 > c^2$ stellt nämlich die Gleichung Ellipsen dar und diese werden von den Hyperbeln, die für $\lambda^2 < c^2$ sich ergeben, rechtwinklig geschnitten, und umgekehrt.

4) Die orthogonalen Trajectorien des von dem veränderlichen Parameter a abhängigen Curvensystems

$$r^n = a^n \sin n\varphi$$

zu bestimmen.

Durch Differentiation entsteht

$$nr^{n-1}r' = na^n \cos n\varphi,$$

und die Elimination von a^n ergibt die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad r \cos n\varphi - r' \sin n\varphi = 0.$$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien entsteht hieraus, wenn man r' durch $-\frac{r^2}{r'}$ ersetzt, und lautet daher

$$(\beta) \qquad r' \cos n\varphi + r \sin n\varphi = 0.$$

Durch die Transformation

$$r = r_1, \qquad \varphi = \varphi_1 + \frac{\pi}{2n}$$

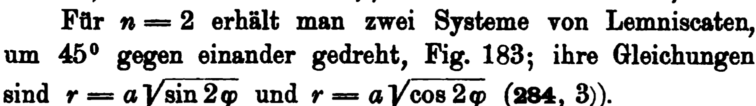
geht aber die Gleichung (β) über in

$$r_1 \cos n\varphi_1 - r_1' \sin n\varphi_1 = 0$$

und stimmt dann mit (α) überein. Die angegebene Transformation besteht aber in einer Drehung um den Pol durch den Winkel $\frac{\pi}{2n}$. Das System der orthogonalen Trajectorien des vorgelegten Curvensystems ist also ein congruentes System, gegen das erste jedoch um den Winkel $\frac{\pi}{2n}$ gedreht.

Fig. 183.

Für $n = 1$ ergeben sich zwei orthogonale Berührungskreisbüschel, das eine $r = a \sin\varphi$, das andere $r = a \cos\varphi$.



Für $n = 2$ erhält man zwei Systeme von Lemniscaten, um 45^0 gegen einander gedreht, Fig. 183; ihre Gleichungen sind $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$ und $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (**284**, 3)).

5) Die isogonalen Trajectorien eines Strahlenbüschels zu bestimmen.

Die einfachste analytische Darstellung hat ein Strahlenbüschel im Polarsystem, wenn man seinen Mittelpunkt mit dem Pole zusammenfallen lässt; seine Gleichung lautet dann

$$\varphi = c.$$

Daraus entspringt die Differentialgleichung

$$d\varphi = 0,$$

welche weiter zur Folge hat, dass

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r\,d\varphi}{dr} = 0,$$

also

$$\frac{r}{r'} = 0$$

ist. Dies ist nur eine andere Form der ursprünglichen Differentialgleichung $d\varphi = 0$. Ersetzt man hier r' nach Vorschrift von (8) durch $\frac{kr^2 + rr'}{r - kr'}$, so ergibt sich

$$r - kr' = 0$$

als Differentialgleichung der Trajectorien. Durch Trennung der Variabeln und Integration kommt man zunächst auf $l.r = l.C + \frac{\varphi}{k}$ und schliesslich auf

$$r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Die isogonalen Trajectorien eines Strahlenbüschels sind demnach logarithmische Spiralen (181, 3)).

328. *Evolventen.* Unter den *Evolventen* einer gegebenen Curve versteht man die orthogonalen Trajectorien ihrer Tangenten also alle jene Curven, deren Normalen die gegebene Curve berühren.

Es sei

$$y = F(x) \tag{1}$$

die gegebene Curve; derselben entspricht eine Clairaut'sche Differentialgleichung, welche das Tangentensystem darstellt. Man erhält sie, indem man den Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe $y - xp$ mit Hilfe von (1) und

$$p = F'(x) \tag{2}$$

als Function von p ausdrückt; ist $f(p)$ der betreffende Ausdruck, so ist

$$y = xp + f(p) \tag{3}$$

die das Tangentensystem darstellende Gleichung. Aus ihr entsteht die Differentialgleichung der Evolventen von (1), indem p durch $-\frac{1}{p}$ ersetzt wird; sie lautet also

$$y = -\frac{x}{p} + f\left(-\frac{1}{p}\right),$$

ihre allgemeine Form ist daher

$$x + yp = \psi(p), \tag{4}$$

wo $\psi(p)$ für $pf\left(-\frac{1}{p}\right)$ geschrieben ist.

Ehe zur Integration der Gleichung (4) geschritten wird, soll eine charakteristische Eigenschaft ihres Integralsystems nachgewiesen werden.

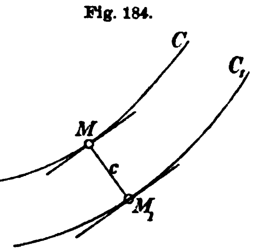


Fig. 184.

Aus einer Curve C, Fig. 184, werde eine neue C_1 dadurch abgeleitet, dass man auf der Normale eines jeden Punktes M von C eine Strecke c abträgt. Der Vorgang ist analytisch in folgender Weise charakterisirt. Sind x/y die Coordinaten von M, $p = \frac{dy}{dx}$ der Richtungscoefficient der Tangente in M; x_1/y_1 die Coordinaten von M_1, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = c^2$$
$$x_1 - x \;\; + (y_1 - y)p = 0,$$

deren erste aussagt, dass $MM_1 = c$, und deren zweite ausdrückt, dass M_1 auf der Normale von C in M liegt. Durch Auflösung nach x, y findet man daraus

$$\begin{cases} x = x_1 + \dfrac{cp}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y = y_1 - \dfrac{c}{\sqrt{1+p^2}}; \end{cases} \tag{5}$$

ferner gibt die Differentiation der ersten der obigen Gleichungen

$$(x_1 - x)(dx_1 - dx) + (y_1 - y)(dy_1 - dy) = 0$$

und dies vereinfacht sich vermöge der zweiten Gleichung, für welche

$$(x_1 - x)dx + (y_1 - y)dy = 0$$

geschrieben werden kann, zu

$$(x_1 - x)dx_1 + (y_1 - y)dy_1 = 0,$$

woraus

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{dy}{dx}$$

oder

$$p_1 = p \tag{6}$$

folgt. Damit ist erwiesen, dass die Tangente der abgeleiteten Curve in M_1 parallel ist der Tangente an die ursprüngliche im Punkte M; wegen dieses Verhaltens werden beide Curven *Parallelcurven* genannt.

Durch die Gleichungen (5), (6) ist eine Transformation der Linienelemente bestimmt, bestehend in einer Verschiebung ihrer Punkte ohne Änderung der Richtung. Man bezeichnet diese Transformation als *Dilatation*. Wendet man sie auf die Differentialgleichung (4) an, so geht diese über in

$$x_1 + \frac{c p_1}{\sqrt{1 + p_1^2}} + p_1\left(y_1 - \frac{c}{\sqrt{1 + p_1^2}}\right) = \psi(p_1)$$

oder nach erfolgter Reduction

$$x_1 + y_1 p_1 = \psi(p_1). \tag{4*}$$

Die Gleichung (4) bleibt also bei Anwendung der Dilatation bis auf die Bezeichnung der Variabeln unverändert. Daraus ergibt sich, *dass die Evolventen einer gegebenen Curve Parallelcurven sind,* dass also aus einer von ihnen alle übrigen durch Ausführung aller möglichen Dilatationen abgeleitet werden können.

Was nun die Integration der Gleichung (4) anlangt, so beachte man, dass sie zu den in x, y linearen Gleichungen (**320**) gehört und daher nach vorausgegangener Differentiation integrirt werden kann. Differentiirt man also und ersetzt dx durch $\frac{dy}{p}$, so entsteht

$$\frac{dy}{p} + y\,dp + p\,dy = \psi'(p)dp$$

oder

$$(1 + p^2)dy + yp\,dp = p\psi'(p)dp;$$

in dieser Form hat die Gleichung den integrirenden Factor $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, welcher die linke Seite in das Differential von $y\sqrt{1+p^2}$ verwandelt. Mithin ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{c + \int \frac{p\psi'(p)dp}{\sqrt{1+p^2}}\right\} \tag{7}$$

und mit Hilfe dessen ergibt sich aus (4)

$$x = \psi(p) - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left\{c + \int \frac{p\psi'(p)dp}{\sqrt{1+p^2}}\right\}. \tag{7*}$$

Durch (7) und (7*) ist das System der Evolventen mittels p parametrisch dargestellt.

329. *Beispiel.* Um die Evolventen der Parabel

$$y^2 + 4ax = 0$$

zu bestimmen, bilde man mit Hilfe von

$$yp + 2a = 0$$

ihre Clairaut'sche Gleichung. Es ist $y = -\frac{2a}{p}$, daher $x = -\frac{a}{p^2}$, folglich

$$y - xp = -\frac{2a}{p} + \frac{a}{p} = -\frac{a}{p}$$

oder

$$y = xp - \frac{a}{p}$$

die Differentialgleichung des Tangentensystems; aus dieser ergibt sich

$$y = -\frac{x}{p} + ap$$

oder

$$x + yp = ap^2$$

als Differentialgleichung der Evolventen. Ihre Integration gibt nach (7) und (7*)

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}[c + a\,l.(p + \sqrt{1+p^2})]$$

$$y = ap - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}[c + a\,l.(p + \sqrt{1+p^2})].$$

Die p-Discriminante der Differentialgleichung der Evolventen ist $y^2 + 4ax$ und führt, wenn man sie Null setzt, auf die zu Grunde gelegte Parabel; diese ist aber nicht Einhüllende der Evolventen, sondern der Ort ihrer Spitzen.

§ 5. Simultane Differentialgleichungen.

330. Wenn zwischen $n + 1$ Variabeln $x, y, z, \ldots u$ und ihren Differentialen n in Bezug auf diese Differentiale *homogene* Gleichungen gegeben sind, so lassen sich mit Hilfe derselben die Verhältnisse von n der Differentiale zu dem $n + 1$-ten bestimmen, z. B. die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{du}{dx}$.

Geht man dann von einer Wertverbindung $x/y/z/\ldots/u$ aus und ertheilt der Variabeln x eine Änderung dx, so sind die Änderungen $dy, dz, \ldots du$ der andern Variabeln bestimmt; mit andern Worten: durch die Variation von x sind die Variationen von $y, z, \ldots u$ schon gegeben. Diese Darlegung zeigt, dass durch jenes *System simultaner Differentialgleichungen* $y, z, \ldots u$ als Functionen von x definirt sind.

Der einfachste Fall besteht darin, dass die Gleichungen in Bezug auf die Differentiale vom ersten Grade sind, also die Form haben

$$(1)\qquad \begin{cases} X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz + \cdots + U_1 du = 0 \\ X_2 dx + Y_2 dy + Z_2 dz + \cdots + U_2 du = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ X_n dx + Y_n dy + Z_n dz + \cdots + U_n du = 0; \end{cases}$$

darin bedeuten $X_i, Y_i, \ldots$ Functionen von $x, y, z, \ldots u$, welche als eindeutig vorausgesetzt werden sollen. Es ergibt sich daraus

$$(2)\qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \cdots = \frac{du}{U},$$

wenn $X, Y, Z, \ldots U$ die n-reihigen Determinanten bedeuten, welche sich aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & \cdots & U_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & U_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n & Y_n & Z_n & \cdots & U_n \end{matrix} \right\|$$

von der zweiten, dritten, ... n-ten Colonne aus in cyklischer Folge bilden lassen; diese Determinanten sind selbst wieder eindeutige Functionen von $x, y, z, \ldots u$.

Man kann den Lösungen (2) auch die Anordnung

$$(2^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots u) \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \ldots u) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{du}{dx} = f_n(x, y, z, \ldots u) \end{cases}$$

geben, die man als *Normalform* eines Systems simultaner Differentialgleichungen zu bezeichnen pflegt.

Wenn sich unter den n in (2) vereinigten Gleichungen eine befindet, welche *nur* die zwei Variabeln enthält, deren Differentiale sie ins Verhältnis setzt, so hat man es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zu thun, und ihr Integral wird auch ein *Integral* des Systems (1) oder (2) genannt. Mit Hilfe desselben kann man aus den übrigen Gleichungen eine der Variabeln eliminiren und unter Umständen ein zweites Integral gewinnen. Im Allgemeinen kommt man auf diesem Wege zu n Integralen, deren jedes eine willkürliche Constante enthält, sodass das Integral des Systems (1), das in der Gesammtheit jener n Integrale besteht, n willkürliche Constante aufweist.

Beispielsweise sei

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \tag{3}$$

das vorgelegte Gleichungssystem. Aus

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

ergibt sich nach Trennung der Variabeln

$$y^2 - z^2 = a; \tag{4}$$

eliminirt man mit Hilfe dieses Integrals y aus dem dritten Theile von (3), so liefert

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{a + z^2}}$$

die endliche Gleichung

$$z + \sqrt{a + z^2} = bx. \tag{5}$$

Mittels (4) und (5) sind y, z als Functionen von x darstellbar. Schreibt man (5) in der Form

$$z + y = bx, \tag{5*}$$

so ist mit Rücksicht auf (4)

$$y - z = \frac{a}{bx}$$

und daraus

$$y = \frac{bx}{2} + \frac{a}{2bx}, \qquad z = \frac{bx}{2} - \frac{a}{2bx}. \tag{6}$$

Dem Falle zweier Differentialgleichungen zwischen drei Variabeln

$$(7) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

kommt folgende geometrische Bedeutung zu. Jedem Punkte $x/y/z$ des Raumes entspricht vermöge (7) ein bestimmtes Verhältnis $dx:dy:dz$, und dieses charakterisirt die Richtung einer durch diesen Punkt laufenden Geraden. Sonach bestimmen $x/y/z$; $dx:dy:dz$ ein *Linienelement* im Raume. Bewegt sich nun der Punkt $x/y/z$ derart, dass seine Bewegungsrichtung in jedem Augenblicke durch das seiner momentanen Lage entsprechende $dx:dy:dz$ gekennzeichnet ist, so beschreibt er im Allgemeinen eine *Raumcurve*, welche, da sie in allen ihren Punkten dem Gleichungssysteme (7) genügt, als eine *Integralcurve* dieses Systems zu bezeichnen ist. Die ∞^3 Linienelemente, welche durch (7) definirt sind, ordnen sich solcher Art zu ∞^2 Integralcurven. Damit stimmt denn auch das Auftreten zweier willkürlichen Constanten in den Integralen von (7) überein; jede der ∞^2 Wertverbindungen dieser Constanten führt zu einer speciellen Curve.

In dem obigen Beispiele ist das System der Integralcurven durch das Gleichungspaar (6) oder auch durch die beiden Gleichungen (4) und (5*) dargestellt. Die letzteren lassen sie sogleich als Hyperbeln erkennen, nämlich als Schnitte der hyperbolischen Cylinder $y^2 - z^2 = a$ mit den Ebenen $y + z = bx$.

331. *Beispiele.* 1) Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

bestimmen das Bündel der Geraden durch den Ursprung; denn ihre Integrale sind

$$y = ax, \qquad z = by;$$

durch jeden Punkt des Raumes geht eine Integrallinie, ausgenommen den Ursprung, in welchem $dx:dy:dz$ unbestimmt ist.

2) Auf die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{\beta z - \gamma y} = \frac{dy}{\gamma x - \alpha z} = \frac{dz}{\alpha y - \beta x}$$

lässt sich das vorhin erörterte Verfahren nicht unmittelbar anwenden. Erweitert man aber die drei Verhältnisse mit den Zahlen α, β, γ und bildet die Summe der Zähler und der Nenner, so entsteht ein neues den früheren gleiches Verhältnis; da jedoch der Nenner desselben $= 0$ ist, muss es der Zähler auch sein; aus

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

folgt aber

$$\text{(A)} \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = a.$$

In gleicher Weise findet man, die drei Verhältnisse mit den Zahlen x, y, z erweiternd, dass

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

sein müsse, woraus

$$\text{(B)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b$$

folgt.

Das erste Integral (A), für sich betrachtet, stellt ein System paralleler Ebenen dar, das zweite (B) eine Schar concentrischer Kugeln um den Ursprung. Die Integralcurven obiger Differentialgleichungen sind sonach alle Kreise, welche um die Gerade $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ als Axe beschrieben sind.

3) Um die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

zu integriren, verbinde man zunächst die beiden letzten Verhältnisse zu der Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

welche das Integral

$$(\alpha) \qquad z = ay$$

ergibt. Erweitert man die drei Verhältnisse durch x, y, z und bildet die Summen der Zähler und Nenner, so entsteht das neue den früheren gleiche Verhältnis

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z^2)},$$

welches mit $\frac{dy}{2xy}$ verglichen*) die exacte Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

liefert; ihr Integral ist

$$(\beta) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = by.$$

Integralcurven sind hier alle Kreise, welche die x-Axe im Ursprunge berühren; denn zu (α) gehört ein Ebenenbüschel durch die x-Axe, zu (β) ein System von Kugeln, das die zx-Ebene im Ursprunge berührt; jede Ebene des ersteren bestimmt mit jeder Kugel des letzteren einen die x-Axe im Ursprunge berührenden Kreis.

§ 6. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

332. Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung zwischen den Variabeln x, y und den Differentialquotienten von y in Bezug auf x bis zur n-ten Ordnung einschliesslich. Ihre allgemeinste Form ist

$$(1) \qquad f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Führt man die Differentialquotienten von der ersten bis zur $n-1$-ten Ordnung als neue unbekannte Functionen mit den Bezeichnungen $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ ein, so tritt an die Stelle der Gleichung (1) das folgende System von n simultanen Differentialgleichungen *erster* Ordnung:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = y' \\ \dfrac{dy'}{dx} = y'' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)} \\ f\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots y^{(n-1)},\ \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}\right) = 0. \end{array}\right.$$

---

*) Aus der Vergleichung mit $\frac{dz}{2xz}$ ergäbe sich

$$x^2 + y^2 + z^2 = cz,$$

was aber vermöge des ersten Integrals wieder in

$$x^2 + y^2 + z^2 = by$$

übergeht.

Die Integration dieses Systems ist im Wesen dasselbe Problem, wie die Integration der Gleichung (1). Das Integral von (2) besteht nämlich in n Gleichungen zwischen den Variabeln $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$, deren jede eine willkürliche Constante enthält; eliminirt man aus diesen Gleichungen die $n - 1$ Functionen $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$, so entsteht *eine* Gleichung zwischen x, y und den n willkürlichen Constanten, und diese ist das allgemeine Integral der Gleichung (1).

Die Integration einer Differentialgleichung n-ter Ordnung ist hiernach zurückführbar auf die Integration von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung, und das allgemeine Integral einer solchen Gleichung enthält n willkürliche Constante.

Es gibt einen Fall, wo dieser Weg unmittelbar zum Ziele führt. Lautet nämlich die Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x), \tag{3}$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' \\ \frac{dy'}{dx} &= y'' \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{dy^{(n-2)}}{dx} &= y^{(n-1)} \\ \frac{dy^{(n-1)}}{dx} &= \varphi(x) \end{aligned}$$

das äquivalente System, und von der letzten Gleichung angefangen erhält man successive

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int \varphi(x)\,dx + c_1 \\ y^{(n-2)} &= \int dx \int \varphi(x)\,dx + c_1 x + c_2 \\ y^{(n-3)} &= \int dx \int dx \int \varphi(x)\,dx + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

sodass schliesslich y selbst sich darstellt in der Form

$$y = \int dx \int dx \ldots \underset{(n)}{\int} \varphi(x)\,dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_n. \tag{4}$$

Die Bestimmung von y erfordert also n successive Quadraturen, und dem Resultate derselben ist eine ganze Function $n-1$-ten Grades mit willkürlichen Coefficienten additiv anzuschliessen.

So erhält man beispielsweise in Anwendung dieses Verfahrens auf

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x \sin x$$

nach und nach

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

$$\int dx \int x \sin x \, dx = -x \sin x - 2\cos x$$

$$\int dx \int dx \int x \sin x \, dx = x \cos x - 3 \sin x,$$

daher ist

$$y = x \cos x - 3 \sin x + ax^2 + bx + c$$

das allgemeine Integral obiger Gleichung.

333. Wir wenden uns jetzt der näheren Betrachtung einer Differentialgleichung *zweiter Ordnung*

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{1}$$

zu. Das allgemeine Integral einer solchen

$$F(x, y, c_1, c_2) = 0 \tag{2}$$

stellt ein zweifach unendliches System von Curven dar.

Umgekehrt führt eine endliche Gleichung von der Form (2) auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, und zwar durch Elimination der Parameter c_1, c_2 aus (2) mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{4}$$

Die Differentialgleichung (1) drückt eine allen Curven des Systems (2) gemeinsame Eigenschaft aus, zunächst in analytischer Form; man kann dieselbe aber auch geometrisch interpretiren, wenn man in (1) $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit Hilfe des Krümmungshalbmessers

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ausdrückt; es geht dadurch (1) über in eine Gleichung von der Zusammensetzung

$$(1^*) \qquad \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varrho\right) = 0;$$

dadurch ist aber für jeden Punkt x/y der Ebene eine *Beziehung zwischen Tangentenrichtung und Krümmungshalbmesser* der durch ihn gehenden Curven des Systems (2) ausgesprochen.

Kehren wir nochmals zu der oben besprochenen Elimination von c_1, c_2 aus (2) zurück. Man kann, blos unter Zuziehung der Gleichung (3), einen der Parameter ausscheiden; eliminirt man c_2, so entsteht eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(5) \qquad \psi_1\left(x, y, c_1, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

welche die Curven mit constantem c_1 charakterisirt; eliminirt man hingegen c_1, so ergibt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(6) \qquad \psi_2\left(x, y, c_2, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

durch welche die Curven mit constantem c_2 gekennzeichnet sind.

Jede der Gleichungen (5), (6) heisst in Bezug auf die Differentialgleichung (1) ein *erstes Integral*, weil der Übergang von (1) zu (5) oder (6) im Allgemeinen einmalige Integration erfordert. Wären zwei erste Integrale wie (5) und (6) auf irgend welchem Wege gefunden, so ergäbe sich aus denselben das endgiltige Integral durch einen blossen Eliminationsprocess, nämlich durch Ausscheidung von $\frac{dy}{dx}$.

Zur Erläuterung dieser Ausführungen diene folgendes Beispiel.

Die endliche Gleichung

$$(\alpha) \qquad Ax^2 + By^2 = 1$$

mit den willkürlichen Constanten A, B stellt das zweifach unendliche System aller coaxialen Centralkegelschnitte vor. Verbindet man sie mit

$$(\beta) \qquad Ax + Byy' = 0$$

und eliminirt einmal B, ein zweitesmal A, so ergeben sich die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(\gamma) \qquad (1 - Ax^2)y' + Axy = 0$$

$$(\delta) \qquad Bxyy' - By^2 + 1 = 0.$$

Fügt man zu (α) und (β) noch die weitere Gleichung

$$(\varepsilon) \qquad A + By'^2 + Byy'' = 0$$

und eliminirt A sowohl als B, so kommt man zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\eta) \qquad xyy'' + xy'^2 - yy' = 0,$$

welche *alle* Curven des Systems (α) kennzeichnet, während durch (γ), (δ) nur gewisse einfach unendliche Scharen derselben charakterisirt sind.

Führt man in (η) ϱ an Stelle von y'' ein, so entsteht

$$xy(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} + xy'^2\varrho - yy'\varrho = 0;$$

diese Gleichung gibt beispielsweise für $x = y = a$ und $y' = -1$

$$\varrho = -a\sqrt{2},$$

d. h. von den durch den Punkt a/a laufenden Curven des Systems (α) hat diejenige, deren Tangente unter 135^0 zur x-Axe geneigt ist, daselbst den Krümmungsradius $-a\sqrt{2}$, ist also ($a > 0$ vorausgesetzt) concav nach unten und somit eine Ellipse. Dagegen liefert $x = -y = a$ und $y' = 1$

$$\varrho = a\sqrt{2},$$

d. h. die durch $a/-a$ mit einer unter 45^0 zur Abscissenaxe geneigten Tangente verlaufende Curve des Systems ist concav nach oben und hat dieselbe Krümmung wie die vorige. Beide Elemente betreffen dieselbe Ellipse.

In Bezug auf (η) sind (γ) und (δ) zwei erste Integrale und die Elimination von y' zwischen beiden gibt

$$\begin{vmatrix} 1 - Ax^2 & Axy \\ Bxy & 1 - By^2 \end{vmatrix} = 1 - Ax^2 - By^2 = 0,$$

also thatsächlich das allgemeine Integral (α).

Um von der Differentialgleichung (η) auf directem Wege zu ihrem allgemeinen Integrale zu gelangen, könnte man von

der Erwägung ausgehen, dass das Glied xyy'' aus der Differentiation von xyy' hervorgeht, welche aber im Ganzen die drei Glieder $xyy'' + xy'^2 + yy'$ liefert; demnach kann für (η) geschrieben werden

$$D_x(xyy') - 2yy' = 0$$

und nach Multiplication mit dx

$$d(xyy') - d(y^2) = 0;$$

daraus aber ergibt sich durch Integration

$$xyy' - y^2 = C_1 .$$

Trennung der Variabeln führt weiter zu

$$\frac{y\,dy}{y^2 + C_1} - \frac{dx}{x} = 0,$$

woraus durch neuerliche Integration

$$y^2 + C_1 = C_2 x^2$$

entsteht; mit der Substitution $\frac{C_2}{C_1} = A$, $-\frac{1}{C_1} = B$ wird dies in volle Übereinstimmung mit (α) gebracht.

334. Es gibt mehrere besondere Formen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche sich auf ein leicht integrirbares System zweier Gleichungen erster Ordnung zurückführen lassen.

a) Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

führt zu dem Systeme

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = p \\ \dfrac{dp}{dx} = f(p), \end{cases} \tag{2}$$

aus welchem sich sofort

$$x + C_1 = \int \frac{dp}{f(p)}, \qquad y + C_2 = \int \frac{p\,dp}{f(p)} \tag{3}$$

ergibt. Lässt sich p aus (3) eliminiren, so ergibt sich das allgemeine Integral in der Form $F(x, y, C_1, C_2) = 0$.

b) Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x) \tag{4}$$

liefert nach **332**

$$y = \int dx \int \varphi(x)\,dx + C_1 x + C_2 . \tag{5}$$

c) Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \psi(y) \tag{6}$$

ist äquivalent den simultanen Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = p \\ \dfrac{dp}{dx} = \psi(y), \end{cases} \tag{7}$$

welche durch leicht ersichtliche Verbindung ergeben

$$\begin{gathered} p^2 = 2\int \psi(y)\,dy + C_1 , \\ x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \psi(y)\,dy + C_1}} . \end{gathered} \tag{8}$$

d) Auch wenn in der Differentialgleichung eine der Variabeln nicht explicit erscheint, kann sie im Allgemeinen integrirt werden.

Es führt nämlich eine Gleichung von der Form

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0 \tag{9}$$

zu dem Systeme

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = p, \\ f\left(x, p, \dfrac{dp}{dx}\right) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

dessen zweite Gleichung von der ersten Ordnung ist in x, p; ist p als Function von x bestimmt, so gibt die erste unmittelbar y.

Einer Gleichung der allgemeinen Form

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0 \tag{11}$$

entspricht das System

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = p \\ f\left(y, p, \dfrac{dp}{dx}\right) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

dessen zweite Gleichung sich mit Hilfe der ersten in

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

verwandelt; dies aber ist eine Gleichung erster Ordnung in p; und hat man p als Function von y bestimmt, so führt die erste der Gleichungen (12) zur Bestimmung von x.

335. *Beispiele.* 1) Jene Curven zu bestimmen, bei welchen der Contingenzwinkel proportional ist dem Bogendifferential.

Die Differentialgleichung dieser Curven (151) lautet

$$\frac{y''}{1+y'^2} = k\sqrt{1+y'^2}$$

und führt auf das System

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = k(1+y'^2)^{\frac{3}{2}};$$

die zweite dieser Gleichungen hat das Integral

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = kx + C_1,$$

woraus

$$y' = \frac{kx + C_1}{\sqrt{1-(kx+C_1)^2}};$$

hiermit aber liefert die erste der Gleichungen

$$y + C_2 = -\frac{1}{k}\sqrt{1-(kx+C_1)^2}.$$

Schafft man die Irrationalität ab und schreibt $-\alpha$ für $\frac{C_1}{k}$, $-\beta$ für C_2, so lautet das allgemeine Integral

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{1}{k^2}$$

und stellt alle Kreise vom Halbmesser $\frac{1}{k}$ vor.

2) Es sind diejenigen Curven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius dem Cubus der Normale proportional und negativ ist.

Wenn man in der diesen Sachverhalt ausdrückenden Gleichung

$$\varrho = -\frac{N^3}{a^2}$$

ϱ und N durch die entsprechenden analytischen Ausdrücke ersetzt, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{a^2}{y^3},$$

welche unter die Form (6) fällt; ihr Integral ist demnach

$$x + c_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{y^2} + c_1}}$$

$$= \int \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 + c_1 y^2}}$$

$$= \frac{1}{c_1}\sqrt{a^2 + c_1 y^2}$$

oder in rationaler Darstellung

$$\frac{(x + c_2)^2}{\left(\frac{a}{c_1}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{c_1}} = 1.$$

Hierin sind aber alle Ellipsen und Hyperbeln enthalten, deren Brennpunktsaxe mit der x-Axe zusammenfällt, und deren halber Parameter $= a$ ist.

3) Es sind jene Curven zu bestimmen, deren Krümmungshalbmesser eine gegebene Function $\varphi(x)$ der Abscisse ist.

Die bezügliche Differentialgleichung

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \varphi(x)$$

löst sich auf in die beiden

$$y' = p, \qquad (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = \varphi(x)\frac{dp}{dx},$$

deren zweite, wenn $\int \frac{dx}{\varphi(x)} = X$ gesetzt wird, das Integral

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = X + c_1$$

ergibt; hieraus aber berechnet sich

$$p = \frac{X + c_1}{\sqrt{1 - (X + c_1)^2}}$$

und hiermit wieder folgt aus der ersten Gleichung

$$y + c_2 = \int \frac{(X + c_1)\,dx}{\sqrt{1 - (X + c_1)^2}}$$

als das allgemeine Integral.

Die zu vollziehende Integration wird sich nur in sehr wenigen Fällen in endlicher Form ausführen lassen. Die specielle Annahme $\frac{a^2}{2x}$, vermöge deren der Krümmungsradius der Abscisse umgekehrt proportional ist, charakterisirt die *elasti-*

sche Linie, d. i. die Form eines horizontal eingespannten, am freien Ende belasteten (ursprünglich) geraden Stabes. Hier ist $X = \frac{x^2}{a^2}$ und die Gleichung der Curve erscheint in der Gestalt

$$y + c_2 = \int \frac{(x^2 + c')dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c')^2}},$$

die eine weitere Ausführung in elementaren Functionen und endlicher Form nicht zulässt.

4) Es sind jene Curven zu bestimmen, deren Krümmungshalbmesser proportional mit der Länge der Normale sich ändert.

Die bezügliche Differentialgleichung

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ky\sqrt{1 + y'^2},$$

von der Structur (11), kann nach Abkürzung mit $\sqrt{1 + y'^2}$ durch

$$y' = p, \qquad 1 + p^2 = kyp\frac{dp}{dy}$$

ersetzt werden. Die zweite dieser Gleichungen führt zu

$$\frac{2p\,dp}{1 + p^2} = \frac{2}{k}\frac{dy}{y}$$

und gibt

$$l.(1 + p^2) = \frac{2}{k}(l.y - l.c_1),$$

woraus

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}.$$

Hiernach ist vermöge der ersten Gleichung das allgemeine Integral

$$x + c_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}}.$$

Die erübrigende Integration bezieht sich auf ein binomisches Differential und ist daher in endlicher Form ausführbar, wenn (242) $\frac{k}{2}$ oder $\frac{k-1}{2}$ eine ganze Zahl, d. h. wenn k eine ganze Zahl ist.

Bemerkenswert sind die folgenden speciellen Fälle.

α) $k = -1$ ergibt

$$x + c_2 = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{c_1^2 - y^2}},$$

woraus $x + c_2 = -\sqrt{c_1^2 - y^2}$ und in rationaler Form

$$(x + c_2)^2 + y^2 = c_1^2;$$

die Eigenschaft $\varrho = -N$ haben also alle Kreise, deren Centrum in der Abscissenaxe liegt.

β) $k = 1$ führt zu

$$x + c_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^2 - 1}},$$

woraus

$$\frac{x + c_2}{c_1} = l.\left(\frac{y}{c_1} + \sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^2 - 1}\right);$$

die Auflösung nach y ergibt

$$y = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x + c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x + c_2}{c_1}}\right);$$

die Eigenschaft $\varrho = N$ kommt demnach allen Kettenlinien mit ein und derselben Grundlinie zu.

γ) Für $k = -2$ ergibt sich

$$x + c_2 = \int \sqrt{\frac{y}{c_1 - y}}\,dy;$$

setzt man

$$y = c_1 \sin^2 \frac{u}{2},$$

so wird

$$\int \sqrt{\frac{y}{c_1 - y}}\,dy = c_1 \int \sin^2 \frac{u}{2}\,du = \frac{c_1}{2}(u - \sin u);$$

mithin ist

$$x + c_2 = \frac{c_1}{2}(u - \sin u)$$

$$y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)$$

die allgemeine Lösung in parametrischer Darstellung; ihr entspricht die Gesammtheit der Cykloiden mit gemeinsamer Grundlinie.

δ) Mit $k = +2$ gelangt man, da die Integration unmittelbar sich ausführen lässt, zu

$$x + c_2 = 2c_1 \sqrt{\frac{y}{c_1} - 1},$$

woraus sich

$$y = c_1 + \frac{(x + c_2)^2}{4 c_1}$$

berechnet. Hierdurch sind alle Parabeln bestimmt, welche die x-Axe zur Leitlinie haben (**154**, 1)).

§ 7. Lineare Differentialgleichungen.

336. Als lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist in **314** eine Gleichung bezeichnet worden, welche bezüglich der zu bestimmenden Function y und ihres Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vom ersten Grade ist. Eine Gleichung, welche in Bezug auf y und die Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschliesslich einen analogen Bau aufweist, wird eine *lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung* genannt. Ihre allgemeine Form ist hiernach

$$(1) \qquad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = p;$$

dabei bedeuten $p_0, p_1, \ldots p_n, p$ Functionen von x allein, die als *eindeutig* vorausgesetzt werden; man kann auch, die Stellen x ausschliessend, für welche $p_0 = 0$ wird, den Coefficienten des höchsten Differentialquotienten auf 1 reduciren, indem man die Gleichung durch p_0 dividirt.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $p = 0$; die Gleichung lautet dann

$$(2) \qquad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$$

und wird als *homogene* Gleichung bezeichnet zum Unterschiede von der *nicht homogenen* Gleichung (1); auch die Bezeichnungen reducirte und vollständige Gleichung sind für (2) und (1) gebräuchlich.

Wegen der wichtigen Beziehungen der Gleichung (2) zur Gleichung (1) wird erstere *die zu* (1) *gehörige* homogene Gleichung genannt.

Im Folgenden wollen wir uns der abkürzenden Schreibweise

$$\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = p, \qquad \sum p_\mu y^{(n-\mu)} = 0$$
$$(\mu = 0, 1, .. n)$$

für (1) und (2) bedienen; dabei ist $y^{(0)} = y$.

In Bezug auf die homogene Differentialgleichung kann zunächst der folgende Satz bewiesen werden: *Das allgemeine Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung ist linear und homogen in Bezug auf die willkürlichen Constanten.*

Ist nämlich y_1 eine Function von x, welche die Gleichung (2) identisch befriedigt, kurz gesagt, ein *particuläres Integral* dieser Gleichung, so ist auch $c_1 y_1$ ein Integral derselben, wenn c_1 eine beliebige Constante bedeutet; denn ist

$$\sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} = 0,$$

so ist auch

$$\sum p_\mu (c_1 y_1)^{(n-\mu)} = c_1 \sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} = 0.$$

Sind ferner $y_1, y_2, \ldots y_k$ mehrere particuläre Integrale von (2), so ist auch das mit beliebigen Constanten gebildete Aggregat $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k$ ein Integral der Gleichung; denn aus

$$\sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} = 0, \qquad \sum p_\mu y_2^{(n-\mu)} = 0, \ldots \sum p_\mu y_k^{(n-\mu)} = 0$$

folgt, dass auch

$$\sum p_\mu (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k)^{(n-\mu)}$$

$$= c_1 \sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} + c_2 \sum p_\mu y_2^{(n-\mu)} + \cdots + c_k \sum p_\mu y_k^{(n-\mu)} = 0$$

ist.

Wenn daher $k = n$, so stellt

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{3}$$

das *allgemeine Integral* vor, vorausgesetzt jedoch, dass die n willkürlichen Parameter $c_1, c_2, \ldots c_n$ *wesentlich* sind.

Damit wäre der oben ausgesprochene Satz bewiesen; die zuletzt gemachte Voraussetzung aber erfordert näheres Eingehen in die Sache.

337. Ertheilt man der unabhängigen Variabeln einen Anfangswert $x = x_0$ und ordnet demselben *beliebige* Anfangswerte $y_{(0)}, y'_{(0)}, \ldots y_{(0)}^{(n-1)}$ von y und seinen $n-1$ ersten Ableitungen zu, so ist durch (2) der zugehörige Wert $y_{(0)}^{(n)}$ der

n-ten Ableitung eindeutig bestimmt. Erfährt nun x_0 einen Zuwachs dx_0, so ändern sich $y_{(0)}, y'_{(0)}, \ldots y^{(n-1)}_{(0)}$ der Reihe um

$$dy_{(0)} = y'_{(0)} dx_0, \quad dy'_{(0)} = y''_{(0)} dx_0, \ldots dy^{(n-1)}_{(0)} = y^{(n)}_{(0)} dx_0$$

und gehen in die neuen, zu $x_0 + dx_0 = x_1$ gehörigen Werte

$$(4) \qquad \begin{cases} y_{(1)} = y_{(0)} + dy_{(0)} \\ y'_{(1)} = y'_{(0)} + dy'_{(0)}, \ldots y^{(n-1)}_{(1)} = y^{(n-1)}_{(0)} + dy^{(n-1)}_{(0)} \end{cases}$$

über. Zu diesen ergibt sich aus (2) abermals ein und nur ein bestimmter Wert $y^{(n)}_{(1)}$ für $y^{(n)}$, und für einen weiteren Zuwachs dx_1 der unabhängigen Variabeln berechnen sich die Änderungen der Werte (4), nämlich

$$dy_{(1)} = y'_{(1)} dx_1, \quad dy'_{(1)} = y''_{(1)} dx_1, \ldots dy^{(n-1)}_{(1)} = y^{(n)}_{(1)} dx_1,$$

und hiermit die zu $x_1 + dx_1 = x_2$ gehörigen Werte

$$y_{(2)} = y_{(1)} + dy_{(1)}$$

$$y'_{(2)} = y'_{(1)} + dy'_{(1)}, \ldots y^{(n-1)}_{(2)} = y^{(n-1)}_{(1)} + dy^{(n-1)}_{(1)}$$

u. s. f.

Hiernach lässt sich, indem man von

$$x = x_0, \quad y_{(0)}, \quad y'_{(0)}, \ldots y^{(n-1)}_{(0)}$$

ausgeht, eine in beliebig engen Intervallen von x fortschreitende Folge von zusammengehörigen Werten

$$(x_0, y_{(0)}), \quad (x_1, y_{(1)}), \quad (x_2, y_{(2)}), \ldots$$

d. h. ein Integral der Gleichung (2) construiren.

Dieses Integral muss nun in dem allgemeinen Integrale (3) mit enthalten sein, mithin müssen sich die Parameter $c_1, c_2, \ldots c_n$ so bestimmen lassen, dass zu $x = x_0$ die Werte $y_{(0)}, y'_{(0)}, \ldots y^{(n-1)}_{(0)}$ gehören; die zu dieser Bestimmung führenden Gleichungen

$$\begin{aligned} y_{(0)} &= c_1 (y_1)_0 + c_2 (y_2)_0 + \cdots + c_n (y_n)_0 \\ y'_{(0)} &= c_1 (y'_1)_0 + c_2 (y'_2)_0 + \cdots + c_n (y'_n)_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}_{(0)} &= c_1 (y^{(n-1)}_1)_0 + c_2 (y^{(n-1)}_2)_0 + \cdots c_n (y^{(n-1)}_n)_0 \end{aligned}$$

ergeben aber nur dann wirklich eine bestimmte Lösung, wenn die Determinante

$$(5)\qquad D_{(0)} = \begin{vmatrix} (y_1)_0 & (y_2)_0 & \cdots & (y_n)_0 \\ (y_1')_0 & (y_2')_0 & \cdots & (y_n')_0 \\ . & . & . & . \\ (y_1^{(n-1)})_0 & (y_2^{(n-1)})_0 & \cdots & (y_n^{(n-1)})_0 \end{vmatrix}$$

nicht Null ist.

Diese Determinante ist derjenige Wert, welchen die Determinante

$$(6)\qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ . & . & . & . \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

für $x = x_0$ annimmt.

Die Determinante D soll im weiteren die „Determinante der particulären Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$" genannt werden.

Die Bedingung $D_{(0)} \lessgtr 0$ muss also erfüllt sein, soll (3) wirklich das allgemeine Integral darstellen; da aber der Ausgangswert x_0 beliebig gewählt werden darf, so kann die erwähnte Bedingung auch durch

$$(7)\qquad D \lessgtr 0$$

selbst ersetzt werden.

Hiernach gilt der Satz: *Das aus den particulären Integralen $y_1, y_2, \ldots y_n$ zusammengesetzte Integral*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

ist nur dann das allgemeine Integral der Gleichung (2), *wenn die Determinante D jener Integrale nicht verschwindet.*

Ein solches System von particulären Integralen heisst ein *Fundamentalsystem* und $y_1, y_2, \ldots y_n$ sind seine Elemente.

Ist ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots y_n$ gegeben, so ist damit die zugehörige homogene Differentialgleichung bestimmt.

Schreibt man sie nämlich in der Form

$$(8)\qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0,$$

so bestehen die Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{cases} y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + p_n y_1 = 0 \\ y_2^{(n} + p_1 y_2^{(n-1)} + \cdots + p_n y_2 = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + \cdots + p_n y_n = 0 \end{cases}$$

und durch diese sind, weil die Determinante $D \lessgtr 0$, die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots p_n$ bestimmt. Man kann übrigens das Resultat der Elimination von $p_1, p_2, \ldots p_n$ aus (8) mit Hilfe der Gleichungen (9) auch durch

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} \cdots y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} \cdots y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} \cdots y_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} \cdots y_n \end{vmatrix} = 0$$

darstellen. Dies also ist jene Differentialgleichung, für welche $y_1, y_2, \ldots y_n$ ein System von Particularintegralen ist.

Wäre beispielsweise die Frage nach jener homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung gerichtet, für welche $y_1 = \sin ax$, $y_2 = \cos ax$ ein Fundamentalsystem bilden*), so gibt

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ -a^2 \sin ax, & a \cos ax, & \sin ax \\ -a^2 \cos ax, & -a \sin ax, & \cos ax \end{vmatrix} = 0$$

Antwort auf die Frage; in entwickelter Form heisst diese Gleichung

$$y'' + a^2 y = 0.$$

Aus dem Systeme (9) ergibt sich insbesondere der erste Coefficient

$$p_1 = - \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \cdots y_1^{(n-2)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' \cdots y_2^{(n-2)} & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' \cdots y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \cdots y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' \cdots y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' \cdots y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

---

*) Dass diese Functionen geeignet sind, ein Fundamentalsystem darzustellen, geht daraus hervor, dass ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin ax & a \cos ax \\ \cos ax & -a \sin ax \end{vmatrix} = -a,$$

also von Null verschieden ist.

der Nenner ist die Determinante D, der Zähler aber geht aus D durch Differentiation in Bezug auf x hervor; demnach ist

$$p_1\,dx = -\frac{dD}{D}$$

und daraus folgt

$$D = C e^{-\int p_1 dx}. \tag{11}$$

Nach dem oben gefundenen charakteristischen Merkmale eines Fundamentalsystems verschwindet D für $x = x_0$ nicht, daher ist auch $C \gtrless 0$; dann aber kann D nicht verschwinden, ohne dass p_1 unendlich würde. Schliesst man also das Unendlichwerden von p_1 aus, so ist die Determinante eines Fundamentalsystems nicht allein an der Ausgangsstelle, sondern im ganzen Gebiete der Variabeln x von Null verschieden.

338. Es sei

$$\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = p \tag{1}$$

eine nicht homogene,

$$\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = 0 \tag{2}$$

die zu ihr gehörige homogene Gleichung; Y ein particuläres Integral der ersten, η das vollständige Integral der zweiten Gleichung. Dann ist also

$$\sum p_\mu Y^{(n-\mu)} = p$$

und

$$\sum p_\mu \eta^{(n-\mu)} = 0;$$

daraus aber ergibt sich durch Addition

$$\sum p_\mu (Y + \eta)^{(n-\mu)} = p.$$

Hiernach ist

$$y = Y + \eta \tag{3}$$

das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung (1).

Es setzt sich also das allgemeine Integral einer nicht homogenen Gleichung aus einem particulären Integrale derselben und dem allgemeinen Integrale der zugehörigen homogenen Gleichung durch Addition zusammen.

Man bezeichnet zuweilen Y als das *Hauptintegral*, η als die *complementäre Function* der Gleichung (1).

339. Die Kenntnis eines particulären Integrals einer homogenen Differentialgleichung ermöglicht es, *die Ordnung der Gleichung um eine Einheit zu erniedrigen*, ohne ihren linearen Charakter aufzuheben.

Es sei nämlich y_1 ein Integral der Gleichung

$$\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = 0; \tag{1}$$

ihr allgemeines Integral kann dann immer in der Form

$$y = y_1 \int z\,dx \tag{2}$$

angenommen werden, wenn unter z eine erst zu bestimmende Function von x verstanden wird. Behufs Ermittelung derselben ist nur nöthig auszudrücken, dass (1) durch (2) befriedigt werde. Nun hat man neben

$$y = y_1 \int z\,dx$$

$$y' = y_1' \int z\,dx + y_1 z$$

$$y'' = y_1'' \int z\,dx + 2y_1' z + y_1 z'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int z\,dx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} z + \binom{n}{2} y_1^{(n-2)} z' + \cdots + y_1 z^{(n-1)};$$

multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit p_n, p_{n-1}, $p_{n-2}, \ldots p_0$ und bildet ihre Summe, so verschwindet in dieser nicht allein die linke Seite, weil (1) erfüllt werden muss, sondern auch das erste mit $\int z\,dx$ behaftete Glied der rechten Seite, weil y_1 ein Integral von (1) ist; die Coefficienten von $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ werden bekannte Functionen von x, die der Reihe nach mit $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots q_0$ bezeichnet werden mögen. Mithin hängt die Bestimmung des z ab von der Gleichung

$$q_0 z^{(n-1)} + q_1 z^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} z = 0; \tag{3}$$

dies aber ist eine homogene lineare Differentialgleichung, deren allgemeines Integral die Form $z = c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$ hat. Setzt man dasselbe, nachdem es gefunden worden, in (2) ein, so ergibt sich das allgemeine Integral von (1) wieder in der bekannten Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int y_2\,dx + c_3 y_1 \int y_3\,dx + \cdots + c_n y_1 \int y_n\,dx.$$

Für eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung ergibt sich daraus die Thatsache, dass die Kenntnis eines particulären Integrals ausreicht, um das nöthige zweite durch Quadraturen herzustellen.

Wendet man nämlich die Substitution (2) auf die Gleichung

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \tag{4}$$

an, so lautet die zur Bestimmung von z führende Gleichung

$$y_1 z' + (p_1 y_1 + 2y_1')z = 0;$$

daraus erhält man nach Multiplication mit dx und Trennung der Variabeln

$$\frac{dz}{z} + p_1 dx + 2\frac{dy_1}{y_1} = 0;$$

das Integral hiervon ist

$$l.z + \int p_1 dx + l.y_1^2 = l.c_2,$$

woraus

$$z = c_2 \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2}.$$

Setzt man dies in (2) ein, so entsteht das allgemeine Integral

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2}\, dx. \tag{5}$$

Durch Vergleichung mit dem allgemeinen Ausdrucke $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ergibt sich hieraus für das y_1 zu einem Fundamentalsystem ergänzende zweite Integral der Ausdruck

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2}\, dx. \tag{6}$$

Zur näheren Erläuterung möge dieser Vorgang an der Gleichung

$$xy'' - (3 + x)y' + 3y = 0 \tag{7}$$

ausgeführt werden. Da die Coefficientensumme $= 0$ ist, so wird die Gleichung offenbar durch $y_1 = e^x$ befriedigt. Auf Grund dieser Kenntnis gibt die Formel (6)

$$y_2 = e^x \int e^{-2x + \int \frac{3+x}{x} dx}\, dx$$

$$= e^x \int x^3 e^{-x} dx = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6);$$

demnach ist das allgemeine Integral von (7)

$$y = c_1 e^x + c_2(x^3 + 3x^2 + 6x + 6).$$

340. Unter den homogenen linearen Differentialgleichungen verdienen diejenigen *mit constanten Coefficienten* besondere Beachtung; ihre Lösung führt auf ein algebraisches Problem, auf die Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung zurück.

Die Gleichung

$$(1) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0,$$

worin $a_1, a_2, \ldots a_n$ gegebene (reelle) Zahlen sind, wird nämlich durch jede Function befriedigt, welche die Eigenschaft

$$(2) \qquad y' = ry$$

besitzt, sobald die Constante r so bestimmt wird, dass

$$(3) \qquad r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ist. Es ist nämlich eine Folge von (2), dass

$$(4) \qquad y'' = r^2 y, \quad y''' = r^3 y, \ldots y^{(n)} = r^n y;$$

die Einsetzung von (2) und (4) in (1) gibt aber

$$y[r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_n] = 0,$$

und dies erfordert, wenn man von der selbstverständlichen particulären Lösung $y = 0$ absieht, dass (3) bestehe.

Nun ergibt sich aus (2) durch Trennung der Variabeln und Integration

$$y = e^{rx};$$

hiernach ist die Exponentialfunction

$$e^{rx}$$

ein Integral der Gleichung (1), wenn r eine Wurzel der *charakteristischen Gleichung* (3) ist. Sind also $r_1, r_2, \ldots r_n$ *n verschiedene* Wurzeln dieser Gleichung, so hat man schon in

$$(5) \qquad y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

das allgemeine Integral der Gleichung (1), weil das zugehörige $D \gtrless 0$ ist.

So gehört zu der Differentialgleichung

$$y'' - a^2 y = 0$$

die charakteristische Gleichung

$$r^2 - a^2 = 0,$$

deren Wurzeln $+a$, $-a$ sind; daher ist

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$$

ihr allgemeines Integral.

341. Eine besondere Besprechung erfordern die *complexen* und die *mehrfachen Wurzeln* der charakteristischen Gleichung.

Ein Paar conjugirt complexer Wurzeln, wie $\alpha + \beta i$ und $\alpha - \beta i$, liefert zu dem allgemeinen Integrale den Bestandtheil

$$c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x},$$

wofür nach **103** geschrieben werden kann

$$e^{\alpha x}[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)];$$

bezeichnet man die willkürlichen Constanten $c_1 + c_2$, $i(c_1 - c_2)$ mit C_1, C_2, so nimmt dies den Ausdruck

$$e^{\alpha x}[C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x] \tag{6}$$

an. Hiernach führt ein Paar conjugirt complexer Wurzeln zu einem aus einer Exponentialfunction und trigonometrischen Functionen zusammengesetzten Beitrage zum allgemeinen Integrale, welcher in dem Falle $\alpha = 0$, d. i. für rein imaginäre Wurzeln, rein trigonometrisch wird.

Hat die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln, so scheint es zunächst, als ob man nicht die zur Bildung des allgemeinen Integrals nöthige Anzahl particulärer Integrale erhalten könnte; die folgende Betrachtung wird jedoch zeigen, dass eine λ-fache Wurzel r_1 genau auf λ verschiedene Integrale führt.

Mit Benützung der Substitution

$$y = e^{r_1 x}\int z\,dx,$$

welche zu den Ableitungen

$$\begin{aligned}
y' &= r_1 e^{r_1 x}\int z\,dx + z e^{r_1 x}\\
y'' &= r_1^2 e^{r_1 x}\int z\,dx + 2r_1 z e^{r_1 x} + z' e^{r_1 x}\\
y''' &= r_1^3 e^{r_1 x}\int z\,dx + 3r_1^2 z e^{r_1 x} + 3r_1 z' e^{r_1 x} + z'' e^{r_1 x}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(n)} &= r_1^n e^{r_1 x}\int z\,dx + \binom{n}{1} r_1^{n-1} z e^{r_1 x} + \binom{n}{2} r_1^{n-2} z' e^{r_1 x}\\
&\quad + \binom{n}{3} r_1^{n-3} z'' e^{r_1 x} + \cdots + z^{(n-1)} e^{r_1 x}
\end{aligned}$$

Anlass gibt, verwandelt sich nämlich die Gleichung (1) in die folgende:

$$e^{r_1 x}\Big[(r_1^n + a_1 r_1^{n-1} + a_2 r_1^{n-2} + \cdots + a_n)\int z\,dx$$
$$+ (n r_1^{n-1} + (n-1) a_1 r_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) z$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2}(n(n-1) r_1^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 r_1^{n-3} + \cdots + 2 a_{n-2}) z' +$$
$$\cdots + z^{(n-1)}\Big] = 0,$$

wofür, wenn man die linke Seite der charakteristischen Gleichung (3) mit $\omega(r)$ bezeichnet, kürzer geschrieben werden kann:

$$\omega(r_1)\int z\,dx + \frac{\omega'(r_1)}{1} z + \frac{\omega''(r_1)}{1\cdot 2} z' + \cdots$$
$$+ \frac{\omega^{(\lambda-1)}(r_1)}{(\lambda-1)!} z^{(\lambda-2)} + \cdots + z^{(n-1)} = 0.$$

Da aber r_1 eine λ-fache Wurzel von (3) ist, so hat man

$$\omega(r_1) = 0, \quad \omega'(r_1) = 0, \ldots \omega^{(\lambda-1)}(r_1) = 0,$$

während $\omega^{(\lambda)}(r_1) \gtrless 0$; infolge dessen vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\frac{\omega^{(\lambda)}(r_1)}{\lambda!} z^{(\lambda-1)} + \frac{\omega^{(\lambda+1)}(r_1)}{(\lambda+1)!} z^{(\lambda)} + \cdots + z^{(n-1)} = 0.$$

Dieser Gleichung aber genügt jedes z, dessen Ableitungen von der $(\lambda - 1)$-ten Ordnung angefangen identisch Null sind; der allgemeinste Ausdruck, dem diese Eigenschaft zukommt, ist die mit beliebigen Coefficienten gebildete rationale Function $\lambda - 2$-ten Grades, nämlich

$$z = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{\lambda-2} x^{\lambda-2};$$

daraus ergibt sich, mit abgeänderter Bezeichnung der Constanten,

$$\int z\,dx = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1}.$$

Mithin ist der aus der λ-fachen Wurzel r_1 entspringende Theil des allgemeinen Integrals

$$(7)\quad e^{r_1 x}\int z\,dx = e^{r_1 x}[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1}];$$

er besteht, wie es der Multiplicität der Wurzel entspricht, aus λ verschiedenen Integralen

$$e^{r_1 x}, \quad x e^{r_1 x}, \quad x^2 e^{r_1 x}, \ldots x^{\lambda-1} e^{r_1 x}.$$

Ist die λ-fache Wurzel r_1 complex, $= \alpha + \beta i$, so gehört zu ihr eine ebenfalls λ-fache conjugirte Wurzel $\alpha - \beta i$, und aus beiden entspringt der folgende Beitrag zum allgemeinen Integrale:

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{\lambda-1}x^{\lambda-1}]$$
$$+ e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)[C_0' + C_1' x + C_2' x^2 + \cdots + C_{\lambda-1}' x^{\lambda-1}],$$

welcher sich nach Einführung neuer Bezeichnungen für die Constanten, und zwar

$$A_0 = C_0 + C_0', \quad A_1 = C_1 + C_1', \ \ldots \ A_{\lambda-1} = C_{\lambda-1} + C_{\lambda-1}'$$
$$B_0 = i(C_0 - C_0'), \ B_1 = i(C_1 - C_1'), \ldots B_{\lambda-1} = i(C_{\lambda-1} - C_{\lambda-1}')$$

wie folgt schreibt:

$$(8) \qquad \begin{cases} e^{\alpha x}[A_0 + A_1 x + \cdots + A_{\lambda-1} x^{\lambda-1})\cos\beta x \\ + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_{\lambda-1} x^{\lambda-1})\sin\beta x]. \end{cases}$$

342. *Beispiele.* 1) Zu der Differentialgleichung

$$4y''' - 6y'' + 4y' - y = 0$$

gehört die charakteristische Gleichung

$$4r^3 - 6r^2 + 4r - 1 = 0;$$

die Wurzeln derselben ergeben sich leicht, wenn man die beiden mittleren Glieder auflöst in $-2r^2 - 4r^2 + 2r + 2r$; die linke Seite zerfällt dann nämlich in die Factoren $(2r-1)(2r^2 - 2r + 1)$; mithin sind

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$$

die fraglichen Wurzeln und daher

$$y = e^{\frac{x}{2}}\left[c_1 + c_2\cos\frac{x}{2} + c_3\sin\frac{x}{2}\right]$$

das allgemeine Integral.

2) Der Differentialgleichung

$$y^{IV} - 4y''' + 3y'' + 4y' - 4y = 0$$

entspricht die charakteristische Gleichung

$$r^4 - 4r^3 + 3r^2 + 4r - 4 = 0,$$

deren linke Seite sich in die Form $(r^2-1)(r-2)^2$ bringen lässt; daraus resultiren die Wurzeln

$$1, \ -1, \ 2, \ 2.$$

Demnach ist

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (c_3 + c_4 x) e^{2x}$$

das allgemeine Integral.

3) Die Differentialgleichung

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

führt zu der charakteristischen Gleichung

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0,$$

welche die doppelt zählenden Wurzeln $\pm i$ hat; infolge dessen ist das allgemeine Integral

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x.$$

4) Jede lineare homogene Gleichung von der Form

$$A_0 x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_n y = 0 \tag{9}$$

kann in eine homogene Gleichung mit constanten Coefficienten umgewandelt werden, und zwar geschieht dies durch die Transformation

$$x = e^{\xi}, \qquad y = \eta. \tag{10}$$

Vermöge dieser Transformation wird nämlich (**42**, (2))

$$\begin{aligned} y' &= e^{-\xi}\eta' \\ y'' &= e^{-2\xi}(\eta'' - \eta') \\ y''' &= e^{-3\xi}(\eta''' - 3\eta'' + 2\eta') \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

wobei $\eta', \eta'', \eta''', \ldots$ die Differentialquotienten von η bezüglich der neuen unabhängigen Variabeln ξ bedeuten. Nach Einführung dieser Ausdrücke nimmt (9) schliesslich die Form

$$a_0 \eta^{(n)} + a_1 \eta^{(n-1)} + \cdots + a_n \eta = 0$$

an; in dem allgemeinen Integrale hat man ξ durch $l.x$ und η durch y zu ersetzen.

Als erstes Beispiel hierzu diene die Gleichung

$$2x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0;$$

sie verwandelt sich in

$$2\eta'' + \eta' - 3\eta = 0,$$

und die zugehörige charakteristische Gleichung $2r^2 + r - 3 = 0$ besitzt die Wurzeln 1 und $-\frac{3}{2}$; demnach ist

$$\eta = c_1 e^{\xi} + c_2 e^{-\frac{3}{2}\xi}$$

das allgemeine Integral, das in den ursprünglichen Variabeln lautet

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{\sqrt{x^3}}.$$

Als zweites Beispiel wählen wir die Gleichung

$$x^3 y''' - 6y = 0;$$

für ihre Transformirte

$$\eta''' - 3\eta'' + 2\eta' - 6\eta = 0$$

ergibt sich mittels der Wurzeln von $r^3 - 3r^2 + 2r - 6 = 0$ das Integral

$$\eta = c_1 e^{3\xi} + c_2 \cos \xi\sqrt{2} + c_3 \sin \xi\sqrt{2};$$

folglich ist

$$y = c_1 x^3 + c_2 \cos \sqrt{2}\, l.x + c_3 \sin \sqrt{2}\, l.x$$

das allgemeine Integral der ursprünglichen Gleichung.

343. Die Integration einer *nicht homogenen* linearen Differentialgleichung ist auf Quadraturen zurückführbar, sobald man das allgemeine Integral, oder was auf dasselbe hinauskommt, ein Fundamentalsystem von particulären Integralen der zugehörigen homogenen Gleichung kennt. Diese wichtige Thatsache lässt sich mit Hilfe einer Methode erweisen, welche Lagrange angegeben und als *Variation der Constanten* bezeichnet hat; der Grund für diese Bezeichnung wird sich sofort ergeben.

Es sei

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = p \tag{1}$$

oder kurz $\sum_0^n p_\mu y^{(n-\mu)} = p$ (mit der Festsetzung, dass $p_0 = 1$) die zur Integration vorgelegte nicht homogene Gleichung, und von der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0 \tag{2}$$

oder $\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = 0$ sei ein Fundamentalsystem particulärer Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$ bekannt, mit dessen Hilfe daher deren allgemeines Integral

$$\eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{3}$$

zusammengesetzt werden kann.

Das allgemeine Integral y von (1) kann man durch die rechte Seite von (3) auch dargestellt denken, wenn man an die Stelle der Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$ entsprechend bestimmte Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ von x bringt, sodass

$$(4) \qquad y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n = \sum_1^n u_\nu y_\nu .$$

Ja, eine solche Darstellung wäre noch auf unzählig viele Arten ausführbar, wenn man die Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ nicht einer entsprechenden Anzahl von Bedingungen unterwürfe; solcher Bedingungen dürfen $n-1$ frei gewählt werden, vermöge deren $n-1$ der u_ν durch das letzte sich darstellen lassen, sodass es nur noch auf die Bestimmung dieses einen u ankommt. Von der Wahl dieser Bedingungen hängt die Durchführbarkeit des angedeuteten Gedankens wesentlich ab.

Um auszudrücken, dass (4) der Gleichung (1) genügt, braucht man die Ableitungen von y. Nun ergibt sich

$$(5) \qquad y' = \sum u_\nu y'_\nu ,$$

wenn man die u_ν so wählt, dass

$$(5^*) \qquad \sum u'_\nu y_\nu = 0.$$

Es wird weiter

$$(6) \qquad y'' = \sum u_\nu y''_\nu ,$$

wenn man den u_ν die weitere Bedingung auferlegt, dass

$$(6^*) \qquad \sum u'_\nu y'_\nu = 0$$

sei. So fortfahrend kommt man nach $n-1$ Differentiationen zu

$$(7) \qquad y^{(n-1)} = \sum u_\nu y_\nu^{(n-1)} ,$$

wenn auch noch die Bedingung

$$(7^*) \qquad \sum u'_\nu y_\nu^{(n-2)} = 0$$

erfüllt ist. Hiermit aber ist die zulässige Anzahl von Bedingungen erschöpft und ergibt sich

$$(8) \qquad y^{(n)} = \sum u_\nu y_\nu^{(n)} + \sum u'_\nu y_\nu^{(n-1)} .$$

Trägt man die Werte für $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}, y^{(n)}$ aus (4), (5), (6), ... (7), (8) in die Gleichung (1) ein, so entsteht

$$\sum u_\nu y_\nu^{(n)} + \sum u'_\nu y_\nu^{(n-1)} + p_1 \sum u_\nu y_\nu^{(n-1)} + p_2 \sum u_\nu y_\nu^{(n-2)} + \cdots$$
$$+ p_\nu \sum u_\nu y_\nu = p \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

oder in anderer Zusammenfassung der Glieder

$$u_1 \sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} + u_2 \sum p_\mu y_2^{(n-\mu)} + \cdots$$
$$+ u_n \sum p_\mu y_n^{(n-\mu)} + \sum u'_\nu y_\nu^{(n-1)} = p \qquad (\mu = 0, \dots n);$$

da aber $y_1, y_2, \dots y_n$ Integrale von (2) bedeuten, so entfallen links alle Glieder bis auf das letzte, sodass

$$\sum u'_\nu y_\nu^{(n-1)} = p \tag{8*}$$

verbleibt.

Durch die n Gleichungen (5*), (6*), ... (7*), (8*), welche ausgeschrieben lauten:

$$\left\{\begin{array}{l} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \cdots + u'_n y_n = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \cdots + u'_n y'_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u'_1 y_1^{(n-2)} + u'_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-1)} = p \end{array}\right. \tag{9}$$

sind die Ableitungen der Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ eindeutig bestimmt; denn das System (9) ist in Bezug auf diese Ableitungen linear und seine Determinante

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{10}$$

ist von Null verschieden, weil $y_1, y_2, \dots y_n$ ein Fundamentalsystem von (2) bilden (337). Bezeichnet man die den Elementen der letzten Zeile von (10) adjungirten Unterdeterminanten mit

$$D_1, \; D_2, \dots D_n,$$

so ist die Auflösung von (9) durch

$$u_1' = \frac{pD_1}{D}, \quad u_2' = \frac{pD_2}{D}, \ldots u_n' = \frac{pD_n}{D}$$

gegeben, und hieraus geht durch Integration

$$(11) \quad \begin{cases} u_1 = c_1 + \int \frac{pD_1}{D}\,dx, \\ u_2 = c_2 + \int \frac{pD_2}{D}\,dx, \ldots u_n = c_n + \int \frac{pD_n}{D}\,dx \end{cases}$$

hervor.

Schliesslich hat man diese Werte in (4) einzusetzen, um das allgemeine Integral von (1) zu erhalten; dasselbe lautet also

$$(12) \quad \begin{cases} y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_1 \int \frac{pD_1}{D}\,dx \\ \quad + y_2 \int \frac{pD_2}{D}\,dx + \cdots + y_n \int \frac{pD_n}{D}\,dx \\ \quad = \sum c_\nu y_\nu + \sum y_\nu \int \frac{pD_\nu}{D}\,dx \\ \quad (\nu = 1, 2, \ldots n). \end{cases}$$

Der erste Theil, d. i. $\sum c_\nu y_\nu$ ist aber laut (3) das Integral η der homogenen Gleichung (2); mithin stellt der zweite Theil, d. i.

$$\sum y_\nu \int \frac{pD_\nu}{D}\,dx$$

das Integral Y dar (338), welches dem Wertsysteme $c_1 = 0$, $c_2 = 0, \ldots c_n = 0$ der Constanten entspricht.

Um die Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten vollständig zu erledigen, wollen wir für eine solche nicht homogene Gleichung

$$(13) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = p,$$

wo p eine Function von x vorstellt, die Formel (12) herstellen, jedoch unter der Einschränkung, dass die zur reducirten Gleichung

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0$$

gehörige charakteristische Gleichung $\omega(r) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln besitze. Sind $r_1, r_2, \ldots r_n$ diese Wurzeln, so ist

$$D = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_n e^{r_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(r_1+r_2+\cdots+r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = e^{(r_1+r_2+\cdots+r_n)x}(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \cdots (r_n - r_1) \\ (r_3 - r_2) \cdots (r_n - r_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (r_n - r_{n-1}), \end{aligned}$$

ferner in analoger Weise

$$\begin{aligned} D_1 = (-1)^{n-1} e^{(r_2+r_3+\cdots+r_n)x}(r_3 - r_2) \cdots (r_n - r_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (r_n - r_{n-1}); \end{aligned}$$

daraus ergibt sich

$$\frac{D_1}{D} = \frac{(-1)^{n-1} e^{-r_1 x}}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \cdots (r_n - r_1)} = \frac{e^{-r_1 x}}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3) \cdots (r_1 - r_n)};$$

bedenkt man aber, dass

$$\omega(r) = (r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n),$$

so stellt sich der Nenner des letzten Ausdrucks als gleichbedeutend mit $\omega'(r_1)$ heraus. Demnach ist schliesslich

$$\frac{D_1}{D} = \frac{e^{-r_1 x}}{\omega'(r_1)}.$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen Quotienten

$$\frac{D_2}{D}, \dots \frac{D_n}{D}.$$

Hiermit also schreibt sich das Integral von (13) wie folgt:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \\ + \frac{e^{r_1 x}}{\omega'(r_1)} \int p e^{-r_1 x} dx + \frac{e^{r_2 x}}{\omega'(r_2)} \int p e^{-r_2 x} dx + \cdots + \frac{e^{r_n x}}{\omega'(r_n)} \int p e^{-r_n x} dx. \end{aligned} \right.$$

344. *Beispiele.* 1) Um die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = x$$

zu integriren, bestimme man die Wurzeln von

$$\omega(r) \equiv r^2 - r - 2 = 0;$$

es sind dies die Zahlen $r_1 = 2$, $r_2 = -1$; mit Hilfe derselben berechnet sich

$$\omega'(r_1) = 3, \qquad \omega'(r_2) = -3,$$

$$\int p e^{-r_1 x} dx = \int x e^{-2x} dx = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

$$\int p e^{-r_2 x} dx = \int x e^x dx \quad = \quad e^x(x-1).$$

Hiernach ist das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung nach Vorschrift von (14)

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

2) Ist die Gleichung

$$y'' + y = e^x$$

zur Integration vorgelegt, so bilde man mit Hilfe der Wurzeln von $r^2 + 1 = 0$, d. i. $\pm i$, das Hauptintegral, welches lautet

$$\frac{e^{ix}}{2i}\int e^{(1-i)x} dx - \frac{e^{-ix}}{2i}\int e^{(1+i)x} dx;$$

seine Ausführung, bei welcher i wie eine Constante zu behandeln ist, liefert

$$\frac{e^{ix}}{2i}\,\frac{e^{(1-i)x}}{1-i} - \frac{e^{-ix}}{2i}\,\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{e^x}{2}.$$

Demnach ist das allgemeine Integral (**341**)

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2}.$$

§ 8. Integration durch Reihen.

345. Wenn die zur Integration vorgelegte Gleichung unter keine der bisher behandelten Formen fällt, bei welchen die Lösung auf Quadraturen sich zurückführen lässt, so greift man zu dem Hilfsmittel der *Integration durch Reihen.*

Vorausgesetzt, dass eine die Gleichung befriedigende Function von einer Stelle x_0 der unabhängigen Variabeln aus

sich in eine Potenzreihe entwickeln lässt, wird diese Entwicklung die Taylor'sche Reihe bilden und lauten

$$(1) \qquad y = y_0 + \frac{y_0'}{1}(x - x_0) + \frac{y_0''}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \cdots,$$

wobei $y_0, y_0', y_0'', \ldots$ die zu $x = x_0$ gehörigen Werte von y und seinen Ableitungen bedeuten. Die Differentialgleichung gestattet die Gewinnung dieser Werte auf Grund folgender Erwägungen.

Angenommen, die Gleichung sei von der n-ten Ordnung und lasse sich in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten $y^{(n)}$ auflösen; dann wird

$$(2) \qquad y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$$

die allgemeine Form der Gleichung sein.

Die Gleichung (2) gestattet aber, auch die höheren Ableitungen von y über die n-te hinaus durch $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ darzustellen; denn differentiirt man sie nach x, so entstehen rechts alle Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschliesslich, und ersetzt man den höchsten von ihnen durch seinen Wert aus (2), so wird auch $y^{(n+1)}$ durch $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ ausgedrückt sein. Darauf dasselbe Verfahren angewendet, ergibt $y^{(n+2)}$ in analoger Darstellung u. s. w.

Nun liegt es im Wesen einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, dass man einem Werte $x = x_0$ der unabhängigen Variabeln *beliebige* Werte von

$$y, y', \ldots y^{(n-1)}$$

zuordnen kann; bezeichnet man diese Werte mit

$$c_1, c_2, \ldots c_n,$$

so sind nach dem Vorausgeschickten für $x = x_0$ alle Ableitungen von y, von der n-ten angefangen, durch $c_1, c_2, \ldots c_n$ ausgedrückt und hiermit die Coefficienten von (1) gewonnen. Da ein auf solche Weise gefundener Ausdruck für y n willkürliche Constante enthält, stellt er das allgemeine Integral dar, jedoch nur dann und so weit, als die Reihe convergent ist.

Liegt nichts im Wege, die Null als Ausgangspunkt der Entwicklung zu wählen, so tritt die Maclaurin'sche Reihe an die Stelle der Taylor'schen und bedeuten nun in

$$(3) \qquad y = y_0 + \frac{y_0'}{1} x + \frac{y_0''}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots$$

die Coefficienten $y_0, y_0', y_0'', \ldots$ die zu $x = 0$ gehörigen Werte von $y, y', y'', \ldots$.

Indessen ist der angedeutete Weg nur in besonders einfachen Fällen zu empfehlen. Zweckmässiger ist es zumeist, die Reihe für y der Form nach anzunehmen und

$$(4) \qquad y = A_0 x^m + A_1 x^{m+p_1} + A_2 x^{m+p_2} + \cdots$$

zu setzen; unter der Voraussetzung, dass diese Reihe convergent ist, ergeben sich auch für $y', y'', \ldots y^{(n)}$ convergente Reihen durch gliedweise Differentiation von (4) (87). Alle diese Reihen in die vorgelegte Differentialgleichung eingesetzt, erhält man eine Gleichung, welche identisch, d. h. für alle Werte von x erfüllt sein muss. Indem man dies analytisch zum Ausdruck bringt, erlangt man die Mittel, um 1) den Anfangsexponenten m, 2) das Fortschreitungsgesetz der Exponenten, also die Natur der Zahlenreihe $p_1, p_2, \ldots$; 3) die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ zu bestimmen.

Bleiben so viele dieser Coefficienten willkürlich, als der Ordnungsexponent der Gleichung Einheiten hat, so ist durch (4) das allgemeine Integral gefunden.

Immer aber hängt schliesslich die Zulässigkeit des Verfahrens von der Convergenz der gewonnenen Reihe ab.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass man auf dem bezeichneten Wege auch solche Integrale findet, die in endlicher Form durch elementare Functionen sich ausdrücken lassen; es braucht beispielsweise nur die gefundene Reihe eine elementare Function darzustellen.

346. *Beispiele.* 1) Wir fangen mit einer Gleichung an, bei welcher beide Methoden in durchsichtiger Weise zum Ziele führen und die überdies directe Integration gestattet, nämlich mit

$$(\alpha) \qquad y'' = ay.$$

Aus (α) ergibt sich durch $n-2$-malige Differentiation

$$y^{(n)} = ay^{(n-2)};$$

wenn man also $x = x_0$ die Werte $y_0 = c_1$, $y_0' = c_2$ von y, y' zuordnet, so ergibt sich

$$\begin{array}{ll} y_0 \;\;= c_1 & y_0{}' \;= c_2 \\ y_0{}'' \;= a c_1 & y_0{}''' = a c_2 \\ y_0{}^{IV} = a^2 c_1 & y_0{}^{V} = a^2 c_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Hiermit aber liefert der Ansatz (1), wenn man gleich die mit c_1 und c_2 behafteten Glieder zusammenfasst,

$$(\beta)\quad \begin{cases} y = c_1 \left\{1 + \frac{a(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \frac{a^2(x-x_0)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\right\} \\ \quad + c_2 \left\{(x-x_0) + \frac{a(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{a^2(x-x_0)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Die beiden Reihen sind für jeden Wert von $x - x_0$ convergent; daher ist auch $x_0 = 0$ zulässig und man hat einfacher (entsprechend dem Ansatz (3))

$$(\gamma)\quad \begin{cases} y = c_1 \left\{1 + \frac{ax^2}{1\cdot 2} + \frac{a^2x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\right\} \\ \quad + c_2 \left\{x + \frac{ax^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{a^2x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Es ist jedoch leicht zu erkennen, dass die erste Reihe die Entwicklung von

$$\frac{e^{x\sqrt{a}} + e^{-x\sqrt{a}}}{2}$$

und die zweite die Entwicklung von

$$\frac{e^{x\sqrt{a}} - e^{-x\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}}$$

ist; mithin gilt auch

$$y = \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2\sqrt{a}}\right) e^{x\sqrt{a}} + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2\sqrt{a}}\right) e^{-x\sqrt{a}}$$

und schliesslich

$$(\delta)\qquad y = C_1 e^{x\sqrt{a}} + C_2 e^{-x\sqrt{a}},$$

wenn man die eingeklammerten Aggregate, deren Werte ja willkürlich sind, mit C_1, C_2 bezeichnet.

Hätte man sofort für y den Ansatz

$$(\varepsilon)\qquad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

supponirt, aus welchem sich

$$y'' = 1\cdot 2 A_2 + 2\cdot 3 A_3 x + 3\cdot 4 A_4 x^2 + \cdots$$

ableitet, so wäre aus der Substitution dieser Reihe in (α)

$$1 \cdot 2 A_2 + 2 \cdot 3 A_3 x + 3 \cdot 4 A_4 x^2 + \cdots$$
$$= a(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots)$$

hervorgegangen; die Vergleichung correspondirender Coefficienten führt zu

$$A_2 = \frac{a A_0}{1 \cdot 2}, \qquad A_3 = \frac{a A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$
$$A_4 = \frac{a^2 A_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \qquad A_5 = \frac{a^2 A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

und hiermit verwandelt sich (ε) in

$$y = A_0 \left\{1 + \frac{a x^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\right\}$$
$$+ A_1 \left\{x + \frac{a x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^2 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots\right\};$$

dies stimmt aber mit (γ) überein.

2) Um die Gleichung

$$(\alpha) \qquad y'' + a x^n y = 0$$

zu integriren, nehme man an, das erste Glied der y darstellenden Reihe sei $A_0 x^m$; sein zweiter Differentialquotient ist $m(m-1) A_0 x^{m-2}$; mithin führt die Einsetzung dieses Gliedes in (α) zu dem Gliederpaare

$$m(m-1) A_0 x^{m-2} + a A_0 x^{m+n}.$$

Der Coefficient von x^{m-2} muss für sich verschwinden, und da $A_0 \lessgtr 0$ vorausgesetzt ist, muss

$$m(m-1) = 0$$

sein, also $m = 0$ oder $m = 1$ genommen werden.

Den Coefficienten von x^{m+n} kann nur das folgende Glied der Reihe zum Verschwinden bringen; dieses Glied muss also $A_1 x^{m+n+2}$ lauten; es liefert dann das Gliederpaar

$$(m+n+2)(m+n+1) A_1 x^{m+n} + a A_1 x^{m+2n+2}.$$

Der Coefficient des zweiten dieser Glieder wird durch das dritte Glied der Reihe aufgehoben werden, welches lauten muss $A_2 x^{m+2n+4}$, u. s. w.

Hiernach ist

$$(\beta) \qquad y = A_0 x^m + A_1 x^{m+n+2} + A_2 x^{m+2n+4} + \cdots$$

die Form der Reihe. Zugleich aber ergibt sich, dass

$$(\gamma)\quad (m+\overline{n+2}\lambda)(m+\overline{n+2}\lambda-1)A_\lambda + aA_{\lambda-1} = 0$$

sein müsse für $\lambda = 1, 2, \ldots$.

Von hier ab sind die Fälle $m = 0$ und $m = 1$ zu trennen.

Für $m = 0$ lautet (γ)

$$(n+2)\lambda(\overline{n+2}\lambda-1)A'_\lambda + aA'_{\lambda-1} = 0$$

und gibt der Reihe nach

$$A_1' = -\frac{aA_0'}{(n+2)(n+1)},$$

$$A_2' = \frac{a^2 A_0'}{2(n+2)^2(n+1)(2n+3)},$$

$$A_3' = -\frac{a^3 A_0'}{2\cdot 3(n+2)^3(n+1)(2n+3)(3n+5)}, \ldots;$$

für $m = 1$ lautet (γ)

$$\overline{n+2}\lambda(\overline{n+2}\lambda+1)A''_\lambda + aA''_{\lambda-1} = 0$$

und liefert

$$A_1'' = -\frac{aA_0''}{(n+2)(n+3)},$$

$$A_2'' = \frac{a^2 A_0''}{2(n+2)^2(n+3)(2n+5)},$$

$$A_3'' = -\frac{a^3 A_0''}{2\cdot 3(n+2)^3(n+3)(2n+5)(3n+7)}, \ldots.$$

Diese Bestimmungen führen zu zwei Integralen, deren jedes mit einem willkürlichen constanten Factor behaftet ist; die Summe beider (336) gibt das allgemeine Integral

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned} y = A_0' \Big\{ 1 &- \frac{ax^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{a^2 x^{2n+4}}{1\cdot 2(n+2)^2(n+1)(2n+3)} \\ &- \frac{a^3 x^{3n+6}}{1\cdot 2\cdot 3(n+2)^3(n+1)(2n+3)(3n+5)} + \cdots \Big\} \\ + A_0'' x \Big\{ 1 &- \frac{ax^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{a^2 x^{2n+4}}{1\cdot 2(n+2)^2(n+3)(2n+5)} \\ &- \frac{a^3 x^{3n+6}}{1\cdot 2\cdot 3(n+2)^3(n+3)(2n+5)(3n+7)} + \cdots \Big\}. \end{aligned}\right.$$

Die Reihen sind, sobald kein Nenner verschwindet, für alle Werte von x convergent.

Einige specielle Fälle mögen besprochen werden.

a) Die Gleichung

$$y'' + xy = 0$$

ist von der Form (α), und zwar ist $a = 1$, $n = 1$; daher

$$y = A_0' \left\{1 - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{2!\,3^2 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{x^9}{3!\,3^3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8} + \cdots\right\}$$
$$+ A_0'' x \left\{1 - \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{2!\,3^2 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{x^9}{3!\,3^3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \cdots\right\}$$

oder

$$y = c_1 \left\{1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4x^6}{6!} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7x^9}{9!} + \cdots\right\}$$
$$+ c_2 x \left\{1 - \frac{2x^3}{4!} + \frac{2 \cdot 5x^6}{7!} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8x^9}{10!} + \cdots\right\}.$$

b) Wenn $n = -2$ ist, werden alle Nenner in (δ) Null, auf die Gleichung

$$y'' + \frac{ay}{x^2} = 0$$

ist also der Vorgang nicht anwendbar. Dieselbe ist aber von der in **342**, 4) behandelten Form und geht bei Anwendung der Transformation

$$x = e^\xi, \qquad y = \eta$$

über in

$$\eta'' - \eta' + a\eta = 0;$$

diese Gleichung hat, wenn r_1, r_2 die Wurzeln von $r^2 - r + a = 0$ sind, das Integral

$$\eta = c_1 e^{r_1 \xi} + c_2 e^{r_2 \xi};$$

folglich ist

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

das Integral obiger Gleichung.

c) Für $n = -1$ verliert die erste der Reihen in (δ) ihre Bedeutung und man findet auf dem bezeichneten Wege nur das particuläre Integral

$$y = A_0'' x \left\{1 - \frac{ax}{1 \cdot 2} + \frac{a^2x^2}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} - \frac{a^3x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \cdots\right\}.$$

3) Es sei die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad y'' + ay' - \frac{2y}{x^2} = 0$$

zu integriren.

Die Einsetzung des Anfangsgliedes $A_0 x^m$ in die linke Seite der Gleichung führt zu dem Gliederpaare

$$(m+1)(m-2)A_0 x^{m-2} + maA_0 x^{m-1};$$

es muss demnach das zweite Glied der Reihe $A_1 x^{m+1}$, das darauffolgende $A_2 x^{m+2}$, u. s. w. sein, sodass die Form derselben durch

$$(\beta) \qquad A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \cdots$$

gegeben ist.

Das Verschwinden des Coefficienten der niedrigsten Potenz, d. i. x^{m-2}, erfordert

$$(m+1)(m-2) = 0,$$

also entweder $m = -1$ oder $m = 2$; ferner hat in dem Resultate der Substitution von (β) in (α) $x^{m-\lambda}$ den Coefficienten $(m+\lambda+1)(m+\lambda-2)A_\lambda + (m+\lambda-1)aA_{\lambda-1}$, folglich muss

$$(\gamma) \quad (m+\lambda+1)(m+\lambda-2)A_\lambda + (m+\lambda-1)aA_{\lambda-1} = 0$$

sein für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots.$

Daraus ergibt sich, wenn $m = -1$ angenommen wird,

$$(\delta) \qquad A_\lambda = -\frac{(\lambda-2)a}{\lambda(\lambda-3)} A_{\lambda-1},$$

also insbesondere

$$A_1 = -\frac{a}{2} A_0; \qquad A_2 = 0;$$

jetzt aber erscheint A_3 in der unbestimmten Form $-\frac{a}{3}\cdot\frac{0}{0}$; legt man derselben den willkürlichen Wert B_0 bei, dann entwickelt sich mit Hilfe von (δ) weiter

$$A_4 = -\frac{2a}{4} B_0, \quad A_5 = \frac{3a^2}{4\cdot 5} B_0, \quad A_6 = -\frac{4a^3}{4\cdot 5\cdot 6} B_0, \ldots.$$

Demnach führt (β) für $m = -1$ auf die Lösung

$$(\varepsilon) \; y = A_0\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{2}\right) + B_0 x^2\left(1 - \frac{2ax}{4} + \frac{3a^2x^2}{4\cdot 5} - \frac{4a^3x^3}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right)$$

und diese ist, weil sie zwei willkürliche Constante enthält, das allgemeine Integral.

Der zweite Wert von m, $m = 2$, in (γ) eingesetzt, gibt

$$A'_\lambda = -\frac{(\lambda+1)a}{\lambda(\lambda+3)} A'_{\lambda-1},$$

woraus der Reihe nach

$$A_1' = -\frac{2a}{4} A_0', \quad A_2' = \frac{3a^2}{4 \cdot 5} A_0', \quad A_3' = -\frac{4a^3}{4 \cdot 5 \cdot 6} A_0', \ldots$$

entspringen; mit dieser Annahme führt also die Reihe (β) zu dem particulären Integrale, welches den zweiten Theil von (ε) bildet.

§ 9. Variationsrechnung.

347. Es gibt eine Kategorie von Problemen aus der Geometrie, Mechanik und andern Gebieten, welche die Bestimmung von Functionen einer Variabeln erfordern unter Bedingungen, die nicht unmittelbar in Form von Differentialgleichungen sich ausdrücken lassen, wo dies vielmehr erst durch die Anwendung einer besonderen Methode, der *Methode der Variation*, zu erreichen ist.

In analytischer Formulirung handelt es sich dabei um folgende Aufgabe.

Es sei y eine unbekannte Function von x; y', y'', ... seien ihre aufeinanderfolgenden Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung; ferner bedeute V eine gegebene Function der Argumente $x, y, y', y'', \ldots$, in letzter Linie also eine noch unbekannte Function von x. Man soll die Abhängigkeit des y von dem x derart bestimmen, dass das Integral

$$v = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx \tag{1}$$

einen extremen Wert erlange; d. h. y ist als Function von x derart zu ermitteln, dass der hieraus resultirende Wert von v grösser, respective kleiner ausfalle als die Werte, welche aus den benachbarten Bestimmungen des y als Function von x hervorgehen.

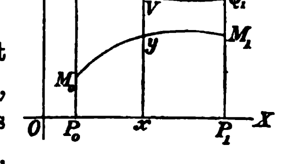


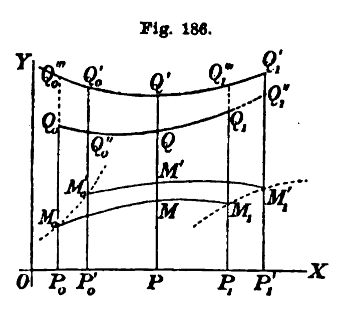
Fig. 185.

Jede Form stetiger Abhängigkeit des y von x, welche man annimmt, führt, wenn man x als Abscisse und y als Ordinate auffasst, zu einer Curve $M_0 M_1$, Fig. 185, und eine zweite Curve $Q_0 Q_1$ ergibt sich, wenn man die aus dieser Abhängigkeit entspringenden Werte von V als

Ordinaten abträgt. Mit der Änderung des functionalen Zusammenhanges zwischen x und y, oder wie man dies zu nennen pflegt, mit der *Variation von y*, ändern sich beide Curven. Die vorgelegte Aufgabe, in geometrischem Gewande, besteht nun darin, die Curve $M_0 M_1$ so zu bestimmen, dass die Fläche der zugeordneten Curve $Q_0 Q_1$, d. i. $P_0 P_1 Q_1 Q_0$, unter den benachbarten die grösste, respective die kleinste werde.

Sind die Grenzen x_0, x_1 des Integrals v fest, also unabhängig von dem Zusammenhange zwischen x und y, so bewegen sich die Endpunkte M_0, M_1 und Q_0, Q_1 der eben erwähnten Curven auf festen Parallelen zur Ordinatenaxe. Sind insbesondere, wie dies häufig der Fall ist, den Werten x_0, x_1 bestimmte Werte y_0, y_1 von y zugeordnet, so sind die Endpunkte M_0, M_1 der ersten Curve fest. Allgemeiner ist die Annahme, dass ein Zusammenhang zwischen x_0, y_0 einerseits und x_1, y_1 andererseits gegeben ist; dann bewegen sich die Endpunkte M_0, M_1 der ersten Curve auf vorgeschriebenen Bahnen, Fig. 186, und ändern sich die Grenzen x_0, x_1 des Integrals mit der Variation von y.

Fig. 186.



348. Die Frage, welche zunächst zu erledigen ist, besteht in Folgendem: Welche Änderung erleidet der Wert von v, wenn man von einem bestimmten Zusammenhange zwischen y und x ausgehend zu einem unendlich benachbarten übergeht, oder kurz ausgedrückt, welches ist die einer unendlich kleinen Variation von y entsprechende Variation von v?

Die Variation einer veränderlichen Grösse bezeichnet man nach dem Vorschlage von Lagrange durch ein ihr vorgesetztes δ; der Unterschied gegen das Leibniz'sche d besteht also darin, dass dy die aus der Änderung von x hervorgehende Änderung von y, hingegen δy die Änderung bedeutet, welche aus der Änderung des functionalen Zusammenhangs entspringt. Auch unter δy hat man sich eine sehr kleine von x abhängige Grösse zu denken.

Dadurch, dass y in $y + \delta y$ übergeht, verwandelt sich die

Curve M_0M_1, Fig. 186, in eine benachbarte $M_0'M_1'$, erfährt weiters V eine Variation δV und wird aus der Curve Q_0Q_1 eine ihr sehr nahe $Q_0'Q_1'$. Daraus endlich geht eine Änderung δv von v hervor, welche in aller Strenge dargestellt wäre durch die Differenz

$$P_0'P_1'Q_1'Q_0' - P_0P_1Q_1Q_0,$$

mit Ausserachtlassung von Grössen höherer Kleinheitsordnung aber ersetzt werden kann durch

$$P_1P_1'Q_1''Q_1 - P_0P_0'Q_0''Q_0 + Q_0Q_1Q_1'''Q_0'''.$$

Mit demselben Grade der Näherung darf der erste Theil durch das Product $P_1Q_1 \cdot P_1P_1' = V_1 \cdot \delta x_1$, der zweite durch $P_0Q_0 \cdot P_0P_0' = V_0 \cdot \delta x_0$ ausgedrückt werden, wenn V_0, V_1 die Werte von V für $x = x_0$, respective $x = x_1$ bedeuten. Wenn ferner festgesetzt wird, dass y und $y + \delta y$, also auch V und $V + \delta V$ jeweilen zu derselben Abscisse gehören, sodass δy durch MM', das zugehörige δV durch QQ' dargestellt erscheint, so ist der dritte Theil nach Grösse und Vorzeichen durch $\int\limits_{x_0}^{x_1} \delta V \cdot dx$ bestimmt.

Hiernach ist

$$\delta v = \left\{ V \cdot \delta x \right\}_{x_0}^{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \delta V \cdot dx. \tag{2}$$

Mit der Variation von y erleiden aber auch dessen Differentialquotienten unendlich kleine Änderungen $\delta y'$, $\delta y''$, ...; und bezeichnet man die partiellen Ableitungen von V in Bezug auf x, y, y', y'', ... der Reihe nach mit X, Y, Y_1, Y_2, ..., so ist bis auf Glieder der ersten Ordnung in den Variationen

$$\delta V = X\delta x + Y\delta y + Y_1 \delta y' + Y_2 \delta y'' + \cdots;$$

weil wir aber festgesetzt haben, dass solche Punkte der Curven M_0M_1 und $M_0'M_1'$ einander zugeordnet werden, welche zu demselben x gehören, so ist mit der Variation des y keine Variation von x verbunden*), also $\delta x = 0$, daher einfacher

$$\delta V = Y\delta y + Y_1 \delta y' + Y_2 \delta y'' + \cdots. \tag{3}$$

---

*) Ausgenommen sind die Grenzen von x, wenn der allgemeine in Fig. 186 gekennzeichnete Fall vorliegt.

Hiermit stellt sich die Variation von v dar durch

$$(4)\quad \delta v = \left\{ V\delta x \right\}_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (Y\delta y + Y_1 \delta y' + Y_2 \delta y'' + \cdots) dx.$$

349. Bevor an eine weitere Umgestaltung dieses Ausdruckes geschritten werden kann, müssen die Beziehungen zwischen den Zeichen d und δ des Differentiirens und des Variirens festgestellt und die Variationen der Ableitungen von y näher untersucht werden.

Sind y, y_1 die zu den Werten x, x_1 gehörigen Werte von y in $M_0 M_1$, $y + \delta y$, $y_1 + \delta y_1$ die Werte in $M_0' M_1'$, so ist

$$y' = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$$y' + \delta y' = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 + \delta y_1 - y - \delta y}{x_1 - x};$$

da aber

$$\lim_{x_1 = x} \frac{y_1 + \delta y_1 - y - \delta y}{x_1 - x} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - y} + \lim \frac{\delta y_1 - \delta y}{x_1 - x},$$

so ergibt sich

$$(5)\quad \delta y' = \frac{d \cdot \delta y}{dx}$$

und daraus

$$(6)\quad \delta y' \cdot dx = d \cdot \delta y.$$

Allgemein ist

$$y^{(n)} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1^{(n-1)} - y^{(n-1)}}{x_1 - x},$$

$$y^{(n)} + \delta y^{(n)} = \lim \frac{y_1^{(n-1)} + \delta y_1^{(n-1)} - y^{(n-1)} - \delta y^{(n-1)}}{x_1 - x}$$

und nach analoger Umformung folgt daraus

$$(7)\quad \delta y^{(n)} = \frac{d \cdot \delta y^{(n-1)}}{dx} = \frac{d^n \cdot \delta y}{dx^n}$$

und

$$(8)\quad \delta y^{(n)} \cdot dx = d \cdot \delta y^{(n-1)}.$$

Wendet man diese Formeln bei Umgestaltung der einzelnen Theile des Integrals in (4) vom zweiten angefangen an, indem man sich dabei partieller Integration bedient, so erhält man nach und nach

$$(9) \quad \int_{x_0}^{x_1} Y_1 \delta y' \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} Y_1 d \cdot \delta y = \Big\{ Y_1 \delta y \Big\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_1' \delta y \cdot dx,$$

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} Y_2 \delta y'' \cdot dx &= \int_{x_0}^{x_1} Y_2 d \cdot \delta y' = \Big\{ Y_2 \delta y' \Big\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_2' \delta y' \cdot dx \\ &= \Big\{ Y_2 \delta y' \Big\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_2' d \cdot \delta y \\ &= \Big\{ Y_2 \delta y' - Y_2' \delta y \Big\}_{x_0}^{x_1} \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} Y_2'' \delta y \cdot dx; \end{aligned} \right.$$

in gleicher Weise ergäbe sich

$$(11) \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} Y_3 \delta y''' \cdot dx \\ &= \Big\{ Y_3 \delta y'' - Y_3' \delta y' + Y_3'' \delta y \Big\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_3''' \delta y \cdot dx \end{aligned} \right.$$

u. s. w. Trägt man die Werte aus (9), (10), (11), ... in (4) ein, so kommt man zu der endgiltigen Darstellung der *Variation des Integrals* v,

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \delta v = \Big\{ & V \delta x + (Y_1 - Y_2' + Y_3'' - \cdots) \delta y \\ & + (Y_2 - Y_3' + \cdots) \delta y' + (Y_3 - \cdots) \delta y'' + \cdots \Big\}_{x_0}^{x_1} \\ & + \int_{x_0}^{x_1} [Y - Y_1' + Y_2'' - Y_3''' + \cdots] \delta y \cdot dx. \end{aligned} \right.$$

Der erste Theil der rechten Seite hängt nur von den Werten des y, seiner Ableitungen und deren Variationen an den Grenzen, der zweite Theil dagegen von dem ganzen Verlaufe von y und seiner Variation ab.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$(13) \qquad \delta v = \mathrm{H} + \int_{x_0}^{x_1} \Theta \delta y \cdot dx,$$

und die Bedeutung von H, Θ ist aus der Vergleichung der Formeln (12) und (13) unmittelbar zu erkennen.

350. Um nun die nothwendige Bedingung eines Extrems zu finden, kann man in ähnlicher Weise schliessen wie bei gewöhnlichen Extremen (115, 120). Durch die Formel (13) ist die Variation, d. i. die Änderung von v, welche der unendlich kleinen Variation δy entspricht, ihrem Hauptwerte nach, nämlich bis auf Glieder der ersten Ordnung in

$$\delta y, \quad \frac{d \cdot \delta y}{dx}, \quad \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2}, \ldots$$

dargestellt; soll jedoch ein Extrem eintreten, so muss der Hauptwert in den genannten Grössen von gerader Ordnung sein, damit eine Zeichenänderung von δy nicht auch eine Zeichenänderung von δv zur Folge habe. Demnach ist *nothwendige* Bedingung eines Extrems, dass

$$\mathsf{H} + \int_{x_0}^{x_1} \Theta \delta y \cdot dx = 0$$

sei; wegen der Unabhängigkeit beider Glieder, da H nur die Grenzen, der zweite Theil aber den ganzen Verlauf von δy betrifft, zerfällt dies in die Bedingungen

$$\mathsf{H} = 0, \qquad \Theta = 0. \tag{14}$$

Die weitere Verfolgung derselben wird aus der Besprechung einiger besonderen Fälle klar werden.

1) Es sei $V = f(x, y, y')$; dann lauten die Gleichungen (14)

$$\left\{ V\delta x + Y_1 \delta y \right\}_{x_0}^{x_1} = 0, \qquad Y - Y_1' = 0. \tag{15}$$

Die erste ist von selbst befriedigt, wenn x_0, y_0; x_1, y_1 feste Werte, die Endpunkte der Curve $M_0 M_1$ also gegeben sind, weil dann $\delta x_0, \delta x_1, \delta y_0, \delta y_1$ insgesammt verschwinden.

Die ausgeführte zweite Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, und hat man ihr Integral

$$F(x, y, c_1, c_2) = 0$$

gefunden, so wird die Lösung der Aufgabe vollendet durch die Ermittlung der Werte der Constanten, zu welchem Zwecke die Gleichungen

$$F(x_0, y_0, c_1, c_2) = 0$$
$$F(x_1, y_1, c_1, c_2) = 0$$

zu verwenden sind.

Wären $x_0, y_0; x_1, y_1$ nicht fest, aber an die Gleichungen

$$(17) \qquad \varphi(x_0, y_0) = 0, \qquad \varphi(x_1, y_1) = 0$$

gebunden, so zerfiele die erste Bedingung (15) in die beiden

$$(V)_0 \delta x_0 + (Y_1)_0 \delta y_0 = 0, \qquad (V)_1 \delta x_1 + (Y_1)_1 \delta y_1 = 0;$$

dazu träten vermöge (17)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \delta y_0 = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \delta y_1 = 0;$$

daraus erhielte man durch Elimination von $\delta x_0, \delta y_0$ einerseits und $\delta x_1, \delta y_1$ andererseits die beiden Gleichungen

$$(V)_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} - (Y_1)_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = 0,$$
$$(V)_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - (Y_1)_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0,$$

welche in Verbindung mit (17) zur Bestimmung von x_0, y_0; x_1, y_1 zu dienen hätten; der weitere Verlauf der Rechnung bliebe unverändert.

2) Ist $V = f(x, y, y', y'')$, so lauten die Bedingungsgleichungen (14)

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Big\{ V\delta x + (Y_1 - Y_2')\delta y + Y_2 \delta y' \Big\}_{x_0}^{x_1} &= 0, \\ Y - Y_1' + Y_2'' &= 0. \end{aligned} \right.$$

Sind die Endpunkte der Curve $M_0 M_1$ und die Tangenten in denselben gegeben, so ist die erste dieser Gleichungen von selbst befriedigt, weil $\delta x_0, \delta y_0, \delta y_0'; \delta x_1, \delta y_1, \delta y_1'$ sämmtlich Null sind. Aus der zweiten Gleichung aber entspringt eine Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Integral

$$(19) \qquad F(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$$

vier Parameter enthält; zur Bestimmung derselben ergeben sich vier Bedingungen, wenn man ausdrückt, dass sowohl (19) wie auch

$$(20) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

durch die beiden Wertsysteme $x_0, y_0, y_0'; x_1, y_1, y_1'$ erfüllt sein müssen.

Es mag noch bemerkt werden, dass die aus $\Theta = 0$ hervorgehende Differentialgleichung, deren Ordnung im allgemeinen

doppelt so hoch ist als die des höchsten in V vorkommenden Differentialquotienten, in manchen Fällen auf eine niedrigere Ordnung gebracht werden kann.

So ist in dem Falle 1), wenn $V = f(x, y')$ ist,

$$Y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

weshalb sich die Gleichung $\Theta = 0$ auf

$$-Y_1' = 0$$

reducirt, woraus unmittelbar

$$Y_1 = c$$

folgt; dies aber ist nurmehr eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Ist $V = f(y, y')$, so gibt die Gleichung

$$Y - Y_1' = 0$$

in Verbindung mit

$$dV = Y dy + Y_1 dy'$$

die neue Gleichung

$$dV = Y_1' dy + Y_1 dy' = y' Y_1' dx + Y_1 dy' = d(y' Y_1),$$

woraus aber

$$V = y' Y_1 + c$$

folgt; es bleibt also wieder nur noch eine Differentialgleichung erster Ordnung zur Integration übrig.

351. Wenn die zu bestimmende Function y, durch welche das Integral

$$v = \int_{x_0}^{x_1} V dx \tag{21}$$

einen extremen Wert erlangen soll, keiner weiteren Bedingung unterworfen ist, so spricht man von einem *absoluten Extreme* des v.

Soll hingegen die Function y auch noch der Forderung genügen, dass das mit ihrer Hilfe gebildete Integral

$$w = \int_{x_0}^{x_1} W dx, \tag{22}$$

wobei W eine Function von $x, y, y', y'', \ldots$ bedeutet, einen vorgeschriebenen Wert a annehme, dann bezeichnet man den so bestimmten Wert von v als *relatives Extrem*.

Zunächst ist klar, dass für ein solches

$$\delta v + \lambda \delta w = 0 \tag{23}$$

sein müsse bei beliebigem λ; denn für jedes Extrem ist $\delta v = 0$, und da w constant bleiben soll, so ist auch $\delta w = 0$.

Umgekehrt, eine Bestimmung für y, welche

$$v + \lambda w = \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda W) dx$$

zu einem absoluten Extreme macht und dabei w den festen Wert a verleiht, hat auch einen extremen Wert von v zur Folge. Angenommen, es handle sich um ein Maximum, und eine benachbarte Bestimmung y_1 für y ergäbe

$$v_1 > v,$$

während

$$w_1 = w;$$

dann hätte man auch

$$v_1 + \lambda w_1 > v + \lambda w,$$

was der Voraussetzung, $v + \lambda w$ sei ein absolutes Extrem, widerspräche. Demnach kann keine benachbarte Bestimmung von y zu einem v_1 führen, das grösser ist als v, folglich ist auch v ein Maximum.

Zur Bestimmung des unbestimmten Multiplicators λ dient die Bedingungsgleichung (22) (vgl. hiermit **123**).

352. *Beispiele.* 1) Es ist die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten der Ebene zu bestimmen.

Sind x_0/y_0 und x_1/y_1 die gegebenen Punkte, so handelt es sich um das Minimum von

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Nach den Schlussbemerkungen in **350** ist y aus der Differentialgleichung erster Ordnung $Y_1 = c$, d. i. aus

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

zu bestimmen. Die Auflösung nach y' ergibt

$$y' = A$$

und die Integration

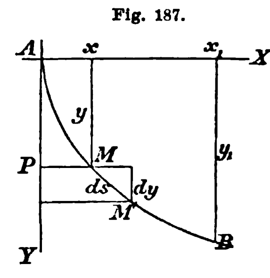
$$y = Ax + B.$$

Die verlangte Linie ist also die Gerade; zur Bestimmung ihrer Parameter dienen die Gleichungen

$$y_0 = Ax_0 + B, \qquad y_1 = Ax_1 + B.$$

2) Die Bahn zu bestimmen, auf welcher ein materieller Punkt, der Schwere überlassen, von einem gegebenen nach einem andern gegebenen Punkte in kürzestmöglicher Zeit gelangt. — Es ist dies die erste Aufgabe der Variationsrechnung, welche zur analytischen Lösung vorgelegt worden ist, und zwar durch Johann Bernoulli im Jahre 1696. — Die betreffende Bahn erhielt den Namen *Brachistochrone*.

Fig. 187.



Wir nehmen als erwiesen an, dass die Bahn eine ebene Curve und in der durch die beiden gegebenen Punkte A, B, Fig. 187, bestimmten Verticalebene gelegen sei. In dieser Ebene werde A als Ursprung und die durch ihn in Richtung der Schwere gezogene Gerade als Ordinatenaxe angenommen. Zunächst lässt sich zeigen, dass der bewegliche Punkt in M mit derselben Geschwindigkeit v ankommt, welche er in P bei freiem Falle erlangt haben würde. Denn aus den auf M bezüglichen Bewegungsgleichungen

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{dy}{ds},$$

in welchen s den Weg AM, t die zu seiner Zurücklegung benöthigte Zeit und g die Beschleunigung der Schwere bedeuten, folgt

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds},$$

daraus weiter

$$2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}dt = 2g\,dy$$

und durch Integration thatsächlich

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy},$$

wenn man die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ voraussetzt.

Hieraus ergibt sich die zur Zurücklegung des Bahnelementes ds nöthige Zeit

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

und die für den Weg AMB erforderliche Zeit

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx.$$

Diese soll ein Minimum werden.

Aus $V = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ ergibt sich

$$Y = -\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}, \qquad Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}},$$
$$Y_1' = \frac{2yy'' - y'^2(1+y'^2)}{2\{y(1+y'^2)\}^{\frac{3}{2}}};$$

somit hat man zur Bestimmung der Bahn die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} + \frac{2yy'' - y'^2(1+y'^2)}{2\{y(1+y'^2)\}^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

welche sich umformen lässt in

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

und schliesslich in

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -2y\sqrt{1+y'^2},$$

in welcher Gestalt sie die geometrische Eigenschaft ausdrückt, dass der Krümmungsradius zur Normale in dem constanten Verhältnisse $-2:1$ steht. Diese Eigenschaft kommt aber (335, 4), γ)) nur Cykloiden zu, welche durch Rollen eines Kreises auf der Abscissenaxe entstehen. Zur Bestimmung seines Halbmessers hat man die Gleichungen

$$x_1 = a(u - \sin u)$$
$$y_1 = a(1 - \cos u);$$

nachdem man aus der transcendenten Gleichung $\frac{1-\cos u}{u - \sin u} = \frac{y_1}{x_1}$ den zu B gehörigen Wälzungswinkel bestimmt hat, kann jede der beiden Gleichungen zur Berechnung von a verwendet werden.

3) In einer Ebene sind zwei Punkte und eine Gerade gegeben; durch die Punkte ist eine Curve zu legen, welche bei ihrer Drehung um die Gerade die kleinstmögliche Fläche beschreibt.

Wählt man die Gerade als Abscissenaxe, so handelt es sich um ein Minimum von (290)

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Hier ist

$$V = y\sqrt{1+y'^2}, \qquad Y = \sqrt{1+y'^2},$$

$$Y_1 = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad Y_1' = \frac{(1+y'^2)y'^2 + yy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

mithin hat die verlangte Curve die Differentialgleichung

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{(1+y'^2)y'^2 + yy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

oder nach einfacher Umgestaltung

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = y\sqrt{1+y'^2}.$$

Dies drückt aber die Gleichheit zwischen Krümmungsradius und Normale aus, eine charakteristische Eigenschaft aller Kettenlinien von der Gleichungsform

$$y = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x+c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x+c_2}{c_1}}\right);$$

die hier geltende Kettenlinie ist durch die Forderung bestimmt, dass sie durch die Punkte x_0/y_0, x_1/y_1 zu gehen hat.

353. Die bisher behandelten Beispiele betrafen absolute Extreme. In den nun folgenden Beispielen handelt es sich darum, unter allen Curven, welchen eine gemeinsame durch ein Integral darstellbare Eigenschaft zukommt, diejenige zu finden, für welche ein anderes bestimmtes Integral einen extremen Wert erlangt, in allgemeiner Ausdrucksweise also um relative Extreme. Unter den Problemen dieser Art sind die *isoperimetrischen Aufgaben* von besonderem Interesse; sie verlangen die Bestimmung von Curven *gegebener* Länge, für welche eine andere mit ihnen zusammenhängende Grösse einen grössten,

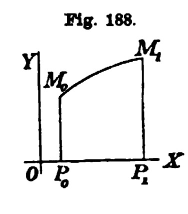
beziehungsweise kleinsten Wert annimmt. Die ersten Aufgaben dieser Art wurden 1697 durch Jacob Bernoulli zur analytischen Lösung gestellt.

Beispiele. 1) Unter den Linien von gegebener Länge a, welche zwei gegebene Punkte $M_0 M_1$, Fig. 188, verbinden, diejenigen zu bestimmen, für welche die Fläche $P_0 P_1 M_1 M_0$ am grössten oder am kleinsten ist.

Es handelt sich also um die extremen Werte von

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx$$

Fig. 188.



unter der Bedingung, dass

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = a$$

sei. Dies aber kommt auf die Feststellung der absoluten Extreme von

$$S + \lambda s = \int_{x_0}^{x_1} \left(y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}\right) dx$$

zurück.

Da nun

$$V = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2},$$

$$Y = 1, \qquad Y_1 = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad Y_1' = \frac{\lambda y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so ist

$$1 - \frac{\lambda y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

oder

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \lambda$$

die Differentialgleichung der gesuchten Curve, diese selbst also ein Kreis. Zu seiner Bestimmung hat man die Sehne $M_0 M_1$ und den zu ihr gehörigen Bogen a; es ergeben sich aber zwei Lösungen; der nach unten concave Bogen gibt ein Maximum, der nach oben concave Bogen ein Minimum der Fläche.

2) Unter den Linien von gegebener Länge a, die zwei gegebene Punkte verbinden, diejenige zu bestimmen, welche bei der Umdrehung um eine in ihrer Ebene liegende Gerade

die kleinstmögliche Fläche erzeugt, oder was ebensoviel bedeutet (**290**, Anmerk.), deren Schwerpunkt dieser Geraden am nächsten liegt.

Es soll hiernach

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

ein Minimum, gleichzeitig aber

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = a$$

sein. Dies kommt darauf hinaus, das absolute Minimum von

$$\int_{x_0}^{x_1} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

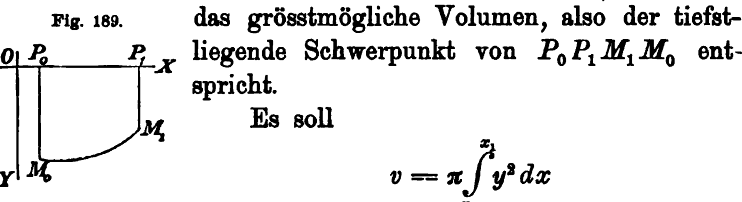
zu suchen; diese Aufgabe ist im Beispiele 3) des vorigen Artikels gelöst worden mit dem einzigen Unterschiede, dass nun $y+\lambda$ an die Stelle von y getreten ist; mithin lautet die Lösung

$$y + \lambda = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x-c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x-c_2}{c_1}}\right).$$

Zur Bestimmung der drei Constanten c_1, c_2 und λ hat man auch drei Bedingungen: die Curve soll durch die beiden gegebenen Punkte gehen und der durch diese Punkte begrenzte Bogen die Länge a haben.

3) Unter den Linien von gegebener Länge a, welche zwei gegebene Punkte M_0, M_1, Fig. 189, verbinden, diejenige zu finden, welcher bei der Umdrehung von $P_0P_1M_1M_0$ um OX das grösstmögliche Volumen, also der tiefstliegende Schwerpunkt von $P_0P_1M_1M_0$ entspricht.

Fig. 189.



Es soll

$$v = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$$

ein Maximum, zugleich aber

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = a$$

werden. Die Frage erledigt sich durch das absolute Maximum von

$$\int_{x_0}^{x_1} (y^2 + \lambda \sqrt{1 + y'^2})\, dx.$$

Man berechnet zu diesem Zwecke aus $V = y^2 + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$

$$Y = 2y, \quad Y_1 = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad Y_1' = \frac{\lambda y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und findet hiermit als Differentialgleichung der gesuchten Curve

$$2y - \frac{\lambda y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\lambda}{2y}.$$

Dies ist der Ausdruck einer geometrischen Eigenschaft der *elastischen Linie*, jener Linie, welche die Gestalt eines in zwei Punkten aufgelegten elastischen Stabes anzeigt (**335**, 3).

Ersetzt man zum Zwecke der Integration y'' durch $\frac{dy'}{dy} y'$ und trennt die Variabeln, so ergibt sich

$$\frac{y'\, dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2y\, dy}{\lambda},$$

daraus durch Integration

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\lambda c_1 - y^2}{\lambda}$$

und durch abermalige Trennung der Variabeln

$$dx = \frac{(\lambda c_1 - y^2)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 - (\lambda c_1 - y^2)^2}},$$

sodass die Curve schliesslich dargestellt ist durch die transcendente Gleichung

$$x + c_2 = \int \frac{(\lambda c_1 - y^2)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 - (\lambda c_1 - y^2)^2}}.$$

Zur Bestimmung von λ, c_1, c_2 sind die nöthigen Bedingungen vorhanden.

4) Die Gestalt eines homogenen Rotationskörpers von gegebener Masse derart zu bestimmen, dass er auf einen gegebenen Punkt der Rotationsaxe die grösstmögliche Anziehung ausübt.

Das schraffirte Element des Flächenstreifens $PP'M'M$, Fig. 190, beschreibt bei der Drehung um OX einen Ring, der auf den Punkt O eine Anziehung von der Grösse

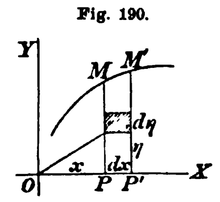


Fig. 190.

$$\frac{2\pi\varrho\eta\,d\eta\,dx}{x^2+\eta^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+\eta^2}}$$

ausübt, wenn ϱ die Massendichte bedeutet. Demnach übt die von dem ganzen Streifen $PP'M'M$ erzeugte Zone eine Anziehung vom Betrage

$$2\pi\varrho\,x\,dx\int_0^y\frac{\eta\,d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi\varrho\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx$$

aus.

Es handelt sich demnach um das Maximum von

$$X=2\pi\varrho\int_{x_0}^{x_1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx,$$

wenn gleichzeitig

$$M=\pi\varrho\int_{x_0}^{x_1}y^2\,dx$$

einen gegebenen Wert hat, also um das absolute Maximum von

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\lambda y^2\right)dx.$$

Aus $V=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\lambda y^2$ aber ergibt sich

$$Y=\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-2\lambda y,\quad Y_1=0,\quad Y_1'=0,$$

sodass $Y=0$ oder

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{x}{2\lambda}$$

schon die endliche Gleichung der Meridiancurve ist. Aus ihrer Polargleichung

$$r=\sqrt{\frac{\cos\varphi}{2\lambda}}$$

erkennt man sogleich, dass es eine im Endlichen geschlossene Curve ist.

Zur Bestimmung von λ dient die gegebene Masse.

354. Wenn die Function V unter dem Integrale

$$(1)\qquad v = \int_{x_0}^{x_1} V dx,$$

dessen Extremwerte gesucht werden, ausser der unbekannten Function y und ihren Ableitungen noch eine zweite Function z von x nebst ihren Differentialquotienten enthält, so ist ohne Mühe zu erkennen, dass in dem Ausdrucke (12), **349**, für die Variation δv neben die auf $y, y', y'', \ldots$ bezüglichen Glieder analog gebildete Glieder treten, welche sich auf $z, z', z'', \ldots$ beziehen, sodass

$$(24)\quad \begin{cases} \mathsf{H} = \Big\{ V\delta x + (Y_1 - Y_2' + \cdots)\delta y + (Y_2 - Y_3' + \cdots)\delta y' + \cdots \\ \quad + (Z_1 - Z_2' + \cdots)\delta z + (Z_2 - Z_3' + \cdots)\delta z' + \cdots \Big\}_{x_0}^{x_1} \end{cases}$$

wird, während an die Stelle von $\Theta\delta y$ tritt

$$(25)\qquad \begin{cases} \Theta\delta y + \Theta_1\delta z = (Y - Y_1' + Y_2'' - \cdots)\delta y \\ \qquad\qquad + (Z - Z_1' + Z_2'' - \cdots)\delta z; \end{cases}$$

$Z, Z_1, Z_1', \ldots$ haben analoge Bedeutung mit $Y, Y_1, Y_1' \ldots$.

Die Bedingungen für ein absolutes Extrem lauten wieder

$$(26)\qquad \mathsf{H} = 0, \qquad \Theta\delta y + \Theta_1\delta z = 0;$$

davon ist die erste von selbst erfüllt, wenn die Grenzen x_0, x_1 fest sind und wenn ihnen auch vorgezeichnete Werte von $y, y', y'', \ldots z, z', z''$ entsprechen.

Zur Illustration des Falles selbst stellen wir uns die Frage nach der *kürzesten Linie, welche zwei gegebene Punkte einer vorgelegten krummen Fläche mit einander verbindet.*

Denkt man sich für die Punkte einer der Fläche

$$(27)\qquad F(x, y, z) = 0$$

aufgeschriebenen Curve y, z als Functionen von x dargestellt, so handelt es sich darum, diese Functionen derart zu bestimmen, dass sie (27) identisch erfüllen und

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

zu einem Minimum machen.

Im vorliegenden Falle ist also

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

$$Y = 0, \qquad Z = 0,$$

$$Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dy}{ds}, \qquad Z_1 = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dz}{ds},$$

$$Y_1' = \frac{d\frac{dy}{ds}}{dx}, \qquad Z_1' = \frac{d\frac{dz}{ds}}{dx};$$

die Bedingung $\mathsf{H} = 0$ ist erfüllt, weil δx_0, δx_1, δy_0, δy_1, δz_0, δz_1 sämmtlich Null sind, es bleiben also nur mehr die Bedingungen $\Theta \delta y + \Theta_1 \delta z = 0$, d. i.

$$\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx}\delta y + \frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}\delta z = 0,$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0$$

übrig, erstere aus der Forderung nach einem Minimum, letztere daraus entspringend, dass die Curve auf der Fläche (27) zu liegen hat. Dieselben führen zu

$$\frac{\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

und durch Erweiterung der Brüche mit $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, Addition der Zähler und Nenner und darauffolgende Unterdrückung des gemeinsamen Factors $\frac{ds}{dx}$ weiter zu

$$\frac{\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y}dy} = \frac{\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial z}dz} = \frac{\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz};$$

aus $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ und (27) folgt aber

$$\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0;$$

hiermit und unter Zuziehung der vorangegangenen dreitheiligen Gleichung ergibt sich

$$\frac{\frac{dx}{ds}\, d\frac{dx}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial x}\, dx} = \frac{\frac{dy}{ds}\, d\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y}\, dy} = \frac{\frac{dz}{ds}\, d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial z}\, dz}$$

und schliesslich

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

als analytische Eigenschaft der gesuchten Curve. Sie ist dadurch als *geodätische Linie* der Fläche gekennzeichnet (**210**), weil $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ den Richtungscosinussen der Flächennormale, $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ den Richtungscosinussen der Curvenhauptnormale im Punkte $x/y/z$ proportional sind.

B. Partielle Differentialgleichungen.

§ 1. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

355. Eine *partielle Differentialgleichung erster Ordnung* mit zwei unabhängigen Variabeln x, y und einer abhängigen z in allgemeinster Form drückt eine Beziehung zwischen x, y, z und den Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

aus, lautet also

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Jede Bestimmung von z als Function von x, y, welche mit ihren ersten Ableitungen diese Gleichung identisch, d. h. für alle Wertverbindungen x/y befriedigt, heisst ein *Integral* derselben. Die Gleichung (1) integriren heisst *alle* Integrale derselben bestimmen.

Fasst man x, y, z als Coordinaten eines Punktes im Raume auf, so entspricht einem functionalen Zusammenhange zwischen z und x, y eine *Fläche*. Ist dieser Zusammenhang ein solcher, welcher die Gleichung (1) identisch erfüllt, mit

andern Worten, ist das so bestimmte z ein Integral von (1), so heisst die Fläche eine *Integralfläche* der Gleichung.

Bei dieser Auffassung kommt auch den Ableitungen p, q von z eine geometrische Bedeutung zu: sie bestimmen die *Stellung* der Tangentialebene im Punkte $x/y/z$ an die betreffende Fläche, deren Gleichung ja lautet

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0. \tag{2}$$

Hiernach ist durch den Complex der fünf Grössen x, y, z, p, q ein Punkt im Raume und eine durch ihn gehende Ebene bestimmt; diese geometrische Verbindung werde als *Flächenelement* bezeichnet.

Ist eine Fläche durch ihre Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

gegeben, so können die zu jeder Wertverbindung x/y (eines gewissen Bereichs) gehörigen Werte von z, p, q, die beiden letzteren aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q = 0 \tag{4}$$

ermittelt werden; dadurch ist ein Punkt der Fläche (3) und eine durch ihn gehende Ebene, die Tangentialebene, bestimmt. Folglich definirt die *endliche* Gleichung (3) so viele Flächenelemente, als die durch sie dargestellte Fläche Punkte aufweist, d. h. ∞^2 Flächenelemente (8).

Es entsteht die Frage nach der Menge der Flächenelemente, welche durch die Differentialgleichung (1) definirt sind. Ersetzt man in dieser Gleichung x, y, z durch bestimmte Zahlen a, b, c, so bleibt eine Beziehung zwischen p und q allein übrig, und diese liefert für jeden angenommenen Wert von p einen oder mehrere Werte von q, also ∞^1 Wertverbindungen p/q; jede Wertverbindung führt zu einem Flächenelemente durch den Punkt $a/b/c$. Da dies für jeden Punkt des Raumes (oder eines Theiles desselben) gilt, so ist die gestellte Frage dahin zu beantworten, dass die Gleichung (1) ∞^4 Flächenelemente definirt.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Allgemeinen ∞^1 Flächenelemente. Die Ebenen dieser Elemente werden entweder durch eine Kegelfläche eingehüllt, oder sie gehen

durch eine Gerade. Um jene Kegelfläche für den Punkt $a/b/c$ zu bestimmen, hat man die Einhüllende der Ebenen

$$p(\xi - a) + q(\eta - b) - (\zeta - c) = 0 \tag{5}$$

zu bestimmen, deren Parameter p, q durch die Gleichung

$$F(a, b, c, p, q) = 0 \tag{6}$$

verbunden sind. Eliminirt man zu diesem Zwecke $\frac{dq}{dp}$ zwischen den Gleichungen

$$(\xi - a) + (\eta - b)\frac{dq}{dp} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dq}{dp} = 0,$$

so entsteht die neue Gleichung

$$(\xi - a)\frac{\partial F}{\partial q} - (\eta - b)\frac{\partial F}{\partial p} = 0; \tag{7}$$

es bleibt jetzt p, q zwischen den Gleichungen (5), (6), (7) oder zwischen

$$\frac{\xi - a}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{\eta - b}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{\zeta - c}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} \tag{8}$$

und (6) zu eliminiren.

Die Gleichungen (8) bestimmen für jede der Gleichung (6) genügende Wertverbindung p/q eine durch den Punkt $a/b/c$ laufende Gerade, und der Ort dieser Geraden ist der erwähnte Kegel, welcher als der dem Punkte $a/b/c$ zugeordnete *Elementarkegel* bezeichnet werden soll.

Ist jedoch die Differentialgleichung (1) *linear* in Bezug auf p und q, so gilt dies auch von der Beziehung (6), welche demnach lauten wird

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0, \tag{9}$$

wobei α, β, γ durch die Werte a, b, c bestimmte Constanten bedeuten. Dann aber ist

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \alpha, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = \beta, \qquad p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = \alpha p + \beta q = \gamma,$$

somit gehen die Gleichungen (8) über in

$$\frac{\xi - a}{\alpha} = \frac{\eta - b}{\beta} = \frac{\zeta - c}{\gamma} \tag{10}$$

und bestimmen eine feste durch $a/b/c$ gehende Gerade, durch welche die Ebenen aller zu $a/b/c$ gehörigen Flächenelemente hindurchgehen.

Die Structur des Systems der Flächenelemente, welche durch eine Differentialgleichung erster Ordnung definirt sind, kennzeichnet sich also in der Weise, dass die zu einem Punkte gehörigen Elemente einer nichtlinearen Gleichung einen Kegel berühren, während sie bei einer linearen Gleichung ein Ebenenbüschel bilden.

Mit den eben entwickelten Begriffen kann das Problem der Integration der Gleichung (1) so gedeutet werden, dass es sich um die Auffindung aller Flächen handelt, deren Flächenelemente sämmtlich dem durch (1) definirten Systeme angehören.

Ist eine solche Fläche gefunden und M ein Punkt derselben, so ist die Tangentialebene in diesem Punkte zugleich Tangentialebene an den zugeordneten Elementarkegel, eine Seite dieses Kegels also Tangente an die Fläche in M; war die Differentialgleichung linear, so ist die Axe des zu M gehörigen Ebenenbüschels Tangente der Fläche. In beiden Fällen gehört somit zu jedem Punkte einer Integralfläche eine bestimmte Richtung. Geht man von einem Punkte M der Fläche aus und bewegt sich auf ihr, diese Richtung beständig verfolgend, so beschreibt man eine Curve, welche eine *Charakteristik* der Integralfläche genannt wird.

356. Eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* hat die Form

$$Pp + Qq = R; \tag{1}$$

darin bedeuten P, Q, R (eindeutige) Functionen von x, y, z.

Mit der allgemeinen Form einer Differentialgleichung erster Ordnung verglichen ist

$$F(x, y, z, p, q) = Pp + Qq - R;$$

daher

$$\frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q, \quad p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = Pp + Qq = R;$$

infolge dessen ist die dem Punkte $x/y/z$ zugeordnete Gerade, welche Tangente an alle durch ihn gehenden Integralflächen ist, durch

$$\frac{\xi - x}{P} = \frac{\eta - y}{Q} = \frac{\zeta - z}{R}$$

dargestellt; auf *allen* durch diesen Punkt gehenden Integralflächen existirt also eine Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$, welche den Gleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{2}$$

genügt.

Dies aber sind zwei simultane gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen den Variabeln x, y, z, deren Theorie in 330 entwickelt worden ist. Darnach bestimmen sie zweifach unendlich viele Curven im Raume, welche durch zwei Gleichungen

$$u = a, \qquad v = b \tag{3}$$

mit den veränderlichen Parametern a, b dargestellt sind; jede dieser Gleichungen ist ein Integral des Systems (2).

Soll die Gleichung

$$u = a$$

ein Integral von (2) sein, so muss die aus ihr hervorgehende Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$$

eine Folge von (2) sein; daher muss u auch die Gleichung

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

erfüllen.

Da aber andererseits aus der Relation

$$u = a$$

für die Differentialquotienten von z nach x und y sich die Bestimmungen

$$p = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

ergeben, so folgt aus (4) weiter

$$Pp + Qq = R;$$

dies aber ist die vorgelegte Differentialgleichung.

Daraus folgt: *Jedes Integral $u = a$ der simultanen Gleichungen (2) ist zugleich ein Integral der Differentialgleichung* (1), *befriedigt aber auch die* **homogene** *lineare Differentialgleichung* (4).

Stellt man zwischen den bisher unabhängig gedachten Parametern a, b der Curve (3) eine beliebige Relation auf, etwa

$$b = \varphi(a),$$

so ist damit eine einfache Unendlichkeit dieser Curven herausgehoben, deren Ort eine Fläche ist mit der Gleichung

$$v = \varphi(u). \tag{5}$$

Auch diese Fläche genügt der vorgelegten Differentialgleichung. Denn differentiirt man (5) partiell nach x, y und z, so entstehen die Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

durch Multipliation derselben mit P, Q, R und darauffolgende Addition erhält man

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi'(u)\left[P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0;$$

diese Gleichung ist aber unabhängig von der Natur der Function φ erfüllt, weil sowohl

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

wie auch

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

identisch besteht. Demnach ist, was auch φ für eine Function sein mag,

$$P\frac{\partial(v - \varphi(u))}{\partial x} + Q\frac{\partial(v - \varphi(u))}{\partial y} + R\frac{\partial(v - \varphi(u))}{\partial z} = 0,$$

folglich auch $v - \varphi(u) = 0$ oder

$$v = \varphi(u)$$

ein Integral von (1). Man bezeichnet es als das *allgemeine Integral* dieser Gleichung, weil es in allgemeinster Weise den

Ort einer einfachen Unendlichkeit von Curven aus dem Systeme (3) darstellt.

Hiernach ergibt sich für die Behandlung einer linearen Differentialgleichung

$$Pp + Qq = R$$

das folgende zuerst von Lagrange angegebene Verfahren: Man bilde die simultanen Gleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

suche zwei verschiedene Integrale derselben,

$$u = a, \qquad v = b,$$

und verbinde diese mittels einer willkürlichen Function φ zu dem allgemeinen Integrale

$$v = \varphi(u).$$

Die simultanen Gleichungen (2) werden die *Hilfsgleichungen von Lagrange* genannt.

Es lässt sich aber auch umgekehrt zeigen, dass eine endliche Gleichung von der Form (5) zu einer linearen Differentialgleichung führt. Differentiirt man (5) in Bezug auf x und y, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p = \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q = \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q\right);$$

eliminirt man aus diesen das willkürliche $\varphi'(u)$, so kommt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p, & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q, & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \end{vmatrix} = 0$$

und durch Entwicklung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} p + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} q = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

zu Stande; dies aber ist thatsächlich eine Differentialgleichung von der Form (1).

Das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung enthält sonach eine willkürliche Function, und jede endliche Gleichung mit einer willkürlichen Function führt durch Elimination der letzteren zu einer linearen Differentialgleichung.

Eine Gleichung von der Form (5) repräsentirt eine *Flächenkategorie*, d. h. Flächen eines gemeinsamen Bildungsgesetzes, das durch die Structur der Functionen u, v bedingt ist.

357. *Beispiele.* 1) Die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten

$$\alpha p + \beta q = \gamma$$

bestimmt in jedem Punkte des Raumes dieselbe Fortschreitungsrichtung

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma};$$

das ihr zugeordnete System von Curven besteht daher in der Gesammtheit aller Geraden der Richtung $\alpha : \beta : \gamma$, deren analytische Darstellung

$$\gamma y - \beta z = a, \qquad \gamma x - \alpha z = b$$

ist. Das allgemeine Integral

$$\gamma x - \alpha z = \varphi(\gamma y - \beta z),$$

wofür auch $\psi(\gamma x - \alpha z,\ \gamma y - \beta z) = 0$ geschrieben werden kann, stellt, als stetige Folge einer einfach unendlichen Schar solcher Geraden, *eine der Richtung* $\alpha : \beta : \gamma$ *parallele Cylinderfläche* vor, deren sonstige Gestaltung von der Natur der Function φ abhängt. Die Mantellinien sind die Charakteristiken.

Auch jede Ebene, welche die Richtung $\alpha : \beta : \gamma$ enthält, ist eine Integralfläche.

2) Die Differentialgleichung

$$(x - x_0)p + (y - y_0)q = z - z_0$$

bestimmt im Punkte $x/y/z$ die Richtung

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0},$$

welche also zusammenfällt mit derjenigen, die diesen Punkt mit dem festen Punkte $x_0/y_0/z_0$ verbindet. Die durch die simultanen Gleichungen definirten Curven bestehen sonach in

dem Geradenbündel durch den Punkt $x_0/y_0/z_0$, und ihre analytische Darstellung lautet

$$\frac{z - z_0}{y - y_0} = a, \qquad \frac{z - z_0}{x - x_0} = b.$$

Das allgemeine Integral

$$\psi\left(\frac{z - z_0}{x - x_0}, \frac{z - z_0}{y - y_0}\right) = 0,$$

da es einer stetigen Folge von unendlich vielen solchen Geraden entspricht, repräsentirt alle *Kegelflächen* mit dem Scheitel $x_0/y_0/z_0$; die Form derselben hängt von der Wahl der Function ψ ab. Wiederum sind die Mantellinien zugleich die Charakteristiken.

Auch jede durch $x_0/y_0/z_0$ gelegte Ebene ist demnach eine Integralfläche.

3) Die Differentialgleichung

$$xp + yq = 0$$

führt auf die Hilfsgleichungen

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Ein Integral derselben ergibt sich aus $dz = 0$ und lautet

$$z = a,$$

ein zweites aus $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, nämlich

$$\frac{y}{x} = b;$$

die erste dieser Gleichungen stellt alle zur z-Axe normalen Ebenen, die zweite alle durch die z-Axe gelegten Ebenen dar, beide zusammen ergeben die Gesammtheit der zur z-Axe normalen Geraden.

Das allgemeine Integral

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist sonach die allgemeine Gleichung der *geraden Conoide*, für welche die z-Axe Leitgerade ist (**205**, 2)). Als Charakteristiken treten die geradlinigen Erzeugenden auf.

4) Zu der Differentialgleichung

$$(\beta z - \gamma y)p + (\gamma x - \alpha z)q = \alpha y - \beta x$$

gehören die Hilfsgleichungen

$$\frac{dx}{\beta z - \gamma y} = \frac{dy}{\gamma x - \alpha z} = \frac{dz}{\alpha y - \beta x}.$$

Die Integration derselben ist in **331**, 1) ausgeführt worden und ergab die beiden von einander verschiedenen Integrale

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b,$$

welche zusammen die Gesammtheit der um die Gerade

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

als Axe gelegten Kreise repräsentiren. Das allgemeine Integral

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

ist demnach die allgemeine Gleichung aller *Rotationsflächen*, welche die genannte Gerade zur Axe haben. Als Charakteristiken figuriren die Parallelkreise.

5) Die Differentialgleichung

$$xzp + yzq = xy$$

ergibt die Hilfsgleichungen

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy};$$

die erste derselben hat das Integral

$$\frac{y}{x} = a;$$

um ein zweites Integral zu finden, erweitere man die drei Brüche der Reihe nach mit y, x, $-2z$ und bilde hierauf die Summen der Zähler und Nenner, man erkennt so, dass

$$ydx + xdy - 2zdz = 0$$

sein müsse, und diese exacte Gleichung gibt das Integral

$$xy - z^2 = b.$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der vorgelegten Gleichung

$$z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

358. Wir setzen nunmehr von der Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

ausdrücklich voraus, sie sei *nicht linear* in Bezug auf p und q, und fragen nach den Integralen, welche sie besitzen kann.

Die Gleichung definirt, wie in **355** ausgeführt worden ist, ∞^4 Flächenelemente. Eine einzelne Fläche umfasst ∞^2 Flächenelemente, somit kann ein zweifach unendliches System von Flächen alle ∞^4 Elemente der Gleichung (1) in sich vereinigen. Ist ein solches Flächensystem gefunden, so wird es sowie auch seine Gleichung

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \tag{2}$$

welche zwei unabhängige willkürliche Parameter enthalten muss, eine *vollständige Lösung* der Gleichung (1) genannt.

Die Probe dafür, ob (2) eine solche Lösung ist, wird in Folgendem bestehen: Differentiirt man (2) nach x und nach y und eliminirt mit Hilfe der so erhaltenen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q = 0 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

die Parameter a, b aus (2), so muss die Gleichung (1) zum Vorschein kommen.

Der Gang dieser Probe zeigt zugleich, *dass zu jedem zweifach unendlichen Flächensysteme eine Differentialgleichung erster Ordnung gehört.*

Es entsteht nun die Frage, ob eine vollständige Lösung, wenn sie einmal gefunden, *alle möglichen* Lösungen der Differentialgleichung herzustellen gestattet.

1) Mit der Annahme einer Beziehung

$$\varphi(a, b) = 0 \tag{4}$$

zwischen den Parametern a, b ist aus dem zweifach unendlichen Flächensysteme ein einfach unendliches herausgehoben. Besitzt letzteres eine Einhüllende, so stellt diese ebenfalls eine Lösung dar; denn (**184**) jedes ihrer Flächenelemente ist zugleich Flächenelement irgend einer Fläche aus (2), genügt also der Gleichung (1). Nun wird die Gleichung der Einhüllenden gefunden, wenn man zuerst zwischen den Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$$

den Differentialquotienten $\frac{db}{da}$, dann zwischen dem Resultate und den beiden Gleichungen (2) und (4) die Parameter eliminirt; im Ganzen kommt es also auf die Elimination von a, b aus den drei Gleichungen

$$(5) \qquad \Phi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$$

an. Eine so erhaltene Lösung, dadurch gekennzeichnet, dass sie von einer willkürlich festzusetzenden Function φ abhängt, wird als *allgemeine Lösung* bezeichnet.

Hervorzuheben ist, dass die Einhüllende mit jeder eingehüllten Fläche unendlich viele Elemente gemein hat, deren Punkte eine Curve — die *Charakteristik* — erfüllen.

2) Die Einhüllende des zweifach unendlichen Systems (2), falls eine solche existirt, stellt auch eine Lösung von (1) dar; denn jedes Flächenelement dieser Einhüllenden ist gleichzeitig Flächenelement irgend einer Fläche aus dem Systeme (2), befriedigt also die Gleichung (1). Man erhält aber die Gleichung der Einhüllenden durch Elimination von a, b zwischen den drei Gleichungen

$$(6) \qquad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0;$$

eine so gefundene Lösung wird als *singuläre Lösung* der Gleichung (1) bezeichnet.

Analytisch ist eine solche dadurch gekennzeichnet, dass sie weder von einem veränderlichen Parameter, noch von einer willkürlich festzusetzenden Function abhängt.

Zu beachten ist der Umstand, dass die singuläre Lösung mit jeder Fläche des Systems (2) nur einen oder mehrere vereinzelte Punkte gemein hat (190).

Hiermit sind aber *alle* Integralflächen erschöpft, welche die Gleichung (1) haben kann.

Um dies zu erkennen, sei $z = f(x, y)$ *irgend* eine Lösung; die zweifach unendlich vielen Flächenelemente derselben können

unter die Flächenelemente der Flächen des Systems (2) nur auf drei verschiedene Arten vertheilt sein.

1] Sie kommen *alle* auf *einer* Fläche des Systems (2) vor, dann ist diese identisch mit $z = f(x, y)$ und man hat es mit einer *particulären* Lösung aus (2) selbst zu thun.

2] Sie vertheilen sich auf einfach unendliche viele Flächen aus dem Systeme (2) derart, dass auf jeder einfach unendlich viele vorkommen; dann ist $z = f(x, y)$ Einhüllende dieser einfach unendlichen Flächenschar, also ein besonderer Fall der allgemeinen Lösung.

3] Sie vertheilen sich auf *alle* Flächen des Systems (2), derart, dass auf jeder nur ein oder eine beschränkte Anzahl von Flächenelementen vorkommt; dann aber ist $z = f(x, y)$ die Einhüllende des Systems (2), also die singuläre Lösung der Gleichung (1).

Eine andere, bezüglich der Integrale von $F(x, y, z, p, q) = 0$ zu erledigende Frage geht dahin, ob eine solche Gleichung *nur eine* vollständige Lösung besitzt, mit andern Worten, ob sich die ∞^4 Flächenelemente jener Gleichung nur auf eine Art in eine zweifach unendliche Flächenschar zusammenfassen lassen.

Die Antwort ergibt sich in folgender Weise. Angenommen, es sei eine vollständige Lösung gefunden,

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0;$$

um einen besonderen Fall der allgemeinen Lösung daraus abzuleiten, setze man

$$b = \varphi(a, a', b'),$$

unter φ eine bestimmte Function und unter a', b' willkürliche Parameter verstanden; es bleibt dann zwischen

$$\Phi(x, y, z, a, \varphi(a, a', b')) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0$$

a zu eliminiren. Das Resultat dieser Elimination wird aber eine Gleichung

$$\Psi(x, y, z, a', b') = 0$$

sein, welche wieder zwei willkürliche Parameter enthält und daher auch eine vollständige Lösung darstellt. Da die Wahl von φ auf unendlich viele Arten getroffen werden kann, so

erkennt man, dass die vorgelegte Differentialgleichung unbegrenzt vieler vollständiger Lösungen fähig ist.

Die Betrachtung lässt aber auch erkennen, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen vollständigen und allgemeinen Lösungen nicht besteht; nur die singuläre Lösung spielt eine besondere Rolle; sie ist Einhüllende sowohl der vollständigen wie der allgemeinen Lösungen.

In zusammenfassender Wiederholung der Ergebnisse kann der folgende Satz ausgesprochen werden: *Ist von einer Differentialgleichung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

ein vollständiges Integral

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0$$

gefunden, so ist damit der Zugang zu allen Integralen gewonnen. Verbindet man a mit b durch eine Relation

$$\varphi(a, b) = 0,$$

so ergibt die Elimination von a, b zwischen

$$\Phi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$$

einen Fall des allgemeinen Integrals. Und eliminirt man, wenn es möglich ist, a, b zwischen

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0,$$

so erhält man die singuläre Lösung.

359. *Beispiel.* Zur Erläuterung des Vorgeführten möge ein Fall, der geometrisch leicht zu durchblicken ist, eingehend besprochen werden. Es wird dabei von der vollständigen Lösung ausgegangen.

Die endliche Gleichung

$$(\alpha) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2,$$

in welcher r constant ist, repräsentirt die zweifach unendliche Schar von Kugeln des Halbmessers r, deren Centra in der xy-Ebene liegen.

Um die zugehörige Differentialgleichung zu erlangen, bilde man durch Differentiation nach x, y die Gleichungen

$$x - a + zp = 0$$
$$y - b + zq = 0$$

und eliminire mit Hilfe derselben a und b; es ergibt sich auf diese Weise

$$(\beta) \qquad z^2(p^2 + q^2 + 1) = r$$

als die verlangte Differentialgleichung, von welcher die vorgelegte endliche Gleichung eine vollständige Lösung ist.

Zwischen den Parametern a, b eine Relation aufstellen heisst diejenigen Kugeln herausheben, deren Centra auf der durch die Gleichung $\varphi(a, b) = 0$ dargestellten Curve liegen; die Einhüllende dieser Kugeln, eine Canalfläche (185, 3)), ist bei jeder Wahl von φ ein besonderer Fall des allgemeinen Integrals. Setzt man beispielsweise $b = a$, differentiirt

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + z^2 = r^2$$

partiell nach a, wodurch

$$x - a + y - a = 0$$

erhalten wird, und eliminirt a, so entsteht

$$(\gamma) \qquad (x - y)^2 + 2z^2 = 2r^2$$

als Gleichung eines geraden Kreiscylinders vom Halbmesser r, dessen Axe den Winkel XOY halbirt.

Um die singuläre Lösung zu erhalten, hat man zwischen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2, \quad x - a = 0, \quad y - b = 0$$

a und b zu eliminiren; man gelangt so zu

$$(\delta) \qquad z^2 = r^2.$$

Diese Gleichung stellt ein Paar zur xy-Ebene paralleler Ebenen in den Abständen $-r$, r dar. Dieses Ebenenpaar hüllt nicht blos alle Kugeln, sondern auch alle Canalflächen ein.

Setzt man ferner in der vollständigen Lösung

$$b = a'a + b'$$

und eliminirt zwischen

$$(x - a)^2 + (y - a'a - b') + z^2 = r^2,$$
$$x - a + a'(y - a'a - b) = 0$$

den Parameter a, so kommt man zu

$$(\varepsilon) \qquad (y - a'x - b')^2 + (1 + a'^2)(z^2 - r^2) = 0$$

und dies ist eine andere vollständige Lösung. Die geometrische Bedeutung dieses Vorganges ist leicht zu erkennen. Die Gleichung $b = a'a + b'$ ist die Gleichung aller Geraden in der

xy-Ebene, folglich die zuletzt gefundene Gleichung der analytische Ausdruck für alle geraden Kreiscylinder, deren Axen in der xy-Ebene liegen. Diese Cylinder umfassen *alle* Flächenelemente des zweifach unendlichen Kugelsystems, ordnen sie aber anders an.

Durch einen zwischen den Ebenen $z = -r$ und $z = r$ angenommenen Punkt M gehen unendlich viele Kugeln aus dem Systeme (α), aber auch unendlich viele Cylinder aus dem Systeme (ε); die Tangentialebenen an alle diese Flächen in M werden durch einen Kegel eingehüllt, und zwar durch einen Kreiskegel mit zur xy-Ebene senkrechter Axe; es ist dies der diesem Punkte entsprechende Elementarkegel. Fällt der Punkt in die xy-Ebene, so degenerirt der Kegel in eine zur xy-Ebene senkrechte Gerade, fällt M in eine der Ebenen $z^2 = r^2$, so degenerirt der Kegel in diese Ebene selbst; zu Punkten ausserhalb der genannten Ebenen gehört kein reeller Elementarkegel, wie auch keine reellen Integralflächen durch sie hindurchgehen.

360. Bevor wir an die Entwicklung einer allgemeinen Methode zur Integration nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung gehen, sollen einige besondere Formen behandelt werden, wo das geometrische Raisonnement allein zum Ziele führt. Auch von dem Gedanken kann man Gebrauch machen, welcher der allgemeinen Methode zu Grunde liegt und darin besteht, dass man eine Relation zwischen p, q und einer willkürlichen Constanten a aufzustellen sucht, die mit der vorgelegten Differentialgleichung zusammen zu solchen Bestimmungen für p, q führt, welche die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

zu einer exacten machen; bei der Integration dieser Gleichung tritt eine zweite Constante b hinzu, sodass das Resultat eine vollständige Lösung der ursprünglichen Gleichung darstellt.

1) Wir beginnen mit der Differentialgleichung

$$F(p, q) = 0, \tag{1}$$

welche keine der drei Variabeln x, y, z explicit enthält.

Sind $p = a$, $q = b$ zwei der Gleichung (1) genügende Werte, so ist jede Ebene

(2) $$z = ax + by + c$$

eine Integralfläche der Gleichung, denn aus (2) folgt $p = a$, $q = b$; folglich genügt jedes Flächenelement dieser Ebene mit seinen fünf Coordinaten $x/y/z/p/q$ der Gleichung (1).

Durch (2) und

(3) $$F(a, b) = 0$$

ist aber ein zweifach unendliches Ebenensystem bestimmt und dieses bildet eine vollständige Lösung der Gleichung.

Jeder Fall der allgemeinen Lösung, als Einhüllende einer einfach unendlichen Ebenenschar, ist eine developpable Fläche. In diesem Sinne kann daher (1) als *Differentialgleichung aller developpabeln Flächen* angesehen werden, so lange F unbestimmt gelassen ist.

Betrachtet man in (2) a und c als die unabhängigen Parameter (b ist vermöge (3) Function von a), so erforderte die Auffindung einer singulären Lösung das Nullsetzen der partiellen Ableitungen von $z - ax - by - c$ in Bezug auf a und c; dies aber führt zu den Gleichungen $-x = 0$, $-1 = 0$, deren zweite absurd ist; eine singuläre Lösung besitzt also die Gleichung (1) nicht.

Es liege beispielsweise die Gleichung

$$p^2 + q^2 = m^2$$

vor. Eine vollständige Lösung derselben ergibt sich aus

$$z = ax + by + c$$

und

$$a^2 + b^2 = m^2;$$

dieselbe lautet

$$z = ax + \sqrt{m^2 - a^2} \cdot y + c$$

und charakterisirt alle Ebenen, welche mit der xy-Ebene einen Winkel vom Cosinus $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$ oder der Tangens m bilden.

Jede Annahme über a und c führt zu einem Falle der allgemeinen Lösung, also auch die Annahme $c = 0$; um das zugehörige Integral zu finden, hat man zwischen

$$z = ax + \sqrt{m^2 - a^2}\, y$$

$$0 = x - \frac{ay}{\sqrt{m^2 - a^2}}$$

26*

a zu eliminiren. Multiplicirt man zu diesem Ende die zweite Gleichung mit $\sqrt{m^2 - a^2}$ und bildet dann die Summe der Quadrate beider, so ergibt sich

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2);$$

dies aber ist die Gleichung eines Kreiskegels mit O als Scheitel und der z-Axe als Axe; die Mantellinien wie auch die Tangentialebenen dieses Kegels sind zur xy-Ebene unter einem Winkel geneigt, dessen Tangens gleich m ist.

2) Von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus lassen sich Differentialgleichungen der drei Formen

$$F(x, p, q) = 0 \tag{1}$$

$$F(y, p, q) = 0 \tag{2}$$

$$F(z, p, q) = 0 \tag{3}$$

lösen.

Einer Ebene mit der Gleichung

$$p\xi + q\eta - \zeta = C \tag{4}$$

bei gegebenem p, q ist vermöge der Gleichung (1) ein betimmtes x zugeordnet; folglich befinden sich in dieser Ebene unendlich viele Flächenelemente, deren Punkte in einer zur yz-Ebene parallelen Geraden liegen. Daraus schliesst man, dass sich unter den Integralflächen der Gleichung (1) auch Cylinder befinden, welche zu der genannten Coordinatenebene parallel sind.

Desgleichen gehören zu den Integralflächen der Gleichungen (2) und (3) auch Cylinderflächen, welche der zx-, respective xy-Ebene parallel sind.

Die allgemeinen Gleichungen einer Richtung sind

$$\frac{\xi}{\alpha} = \frac{\eta}{\beta} = \frac{\zeta}{\gamma}$$

und die Bedingung dafür, dass die Ebene (4) dieser Richtung parallel sei, drückt sich durch die Beziehung

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0 \tag{5}$$

aus.

Ist die Richtung der yz-Ebene parallel, so ist $\alpha = 0$, daher

$$\beta q - \gamma = 0, \quad \text{woraus} \quad q = a; \tag{1*}$$

ist sie der zx-Ebene parallel, so ist $\beta = 0$, daher

$$\alpha p - \gamma = 0, \quad \text{woraus} \quad p = a; \tag{2*}$$

ist sie endlich der xy-Ebene parallel, so ist $\gamma = 0$, daher

(3*) $$\alpha p + \beta q = 0, \quad \text{woraus} \quad q = a p.$$

Die Beziehungen (1*), (2*), (3*) führen zur Integration der Gleichungen (1), (2), (3) beziehungsweise.

Gleichung (1) gibt für $q = a \cdots p = f(x, a)$; hiermit wird

$$dz = f(x, a) dx + a dy$$

und daraus ergibt sich das vollständige Integral

(I) $$z = \int f(x, a) dx + ay + b.$$

Gleichung (2) liefert für $p = a \cdots q = f(y, a)$; hiermit wird

$$dz = a dx + f(y, a) dy$$

und daraus folgt das vollständige Integral

(II) $$z = ax + b + \int f(y, a) dy.$$

Gleichung (3) gibt, wenn darin $q = ap$ gesetzt wird, $p = f(z, a)$; demnach lautet nun die Gleichung $dz = pdx + qdy$ wie folgt:

$$dz = f(z, a) \left\{ dx + a dy \right\}$$

und gibt nach Trennung der Variabeln das vollständige Integral

(III) $$x + ay + b = \int \frac{dz}{f(z, a)}.$$

Eine singuläre Lösung gibt es in den vorliegenden Fällen nicht, weil die Differentiation nach einem der Parameter, nach b, zu einer absurden Gleichung führen würde.

Zur Illustration mögen die folgenden besondern Fälle dienen.

Die Gleichung

$$p = 2qx$$

gibt auf Grund von (I) die vollständige Lösung

$$z = ax^2 + ay + b,$$

eine zweifach unendliche Schar parabolischer Cylinder.

Die Gleichung

$$q = 2yp^2$$

liefert die vollständige Lösung

$$z = ax + a^2y^2 + b,$$

gleichfalls in einer zweifach unendlichen Schar parabolischer Cylinder bestehend.

Die Gleichung

$$9(p^2 z + q^2) = 4$$

hat die vollständige Lösung

$$(z + a^2)^3 = (x + ay + b)^2,$$

welche eine zweifach unendliche Schar von Cylinderflächen dritter Ordnung darstellt.

3) Ein bemerkenswertes Verhalten zeigt die Gleichung

$$z = px + qy + f(p, q), \tag{1}$$

welche der nach Clairaut benannten gewöhnlichen Differentialgleichung (321) nachgebildet ist und gewöhnlich als *verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung* bezeichnet wird.

Ertheilt man darin p und q willkürliche Werte a und b, so stellt sie eine Ebene dar, und jeder Punkt dieser Ebene in Verbindung mit ihr selbst bildet ein Flächenelement, das der Gleichung (1) genügt, mithin ist diese Ebene

$$z = ax + by + f(a, b) \tag{2}$$

eine Integralfläche. Denkt man sich jetzt unter a, b veränderliche Parameter, so stellt (2) ein vollständiges Integral der Gleichung (1) dar.

Man kann sich von dieser Thatsache auch dadurch überzeugen, dass man (2) nach x, dann nach y differentiirt und hierauf a und b eliminirt; die Differentiation gibt

$$p = a, \qquad q = b$$

und die Elimination von a, b aus (2) führt thatsächlich zu (1).

Fügt man zu (2) noch eine Gleichung

$$\varphi(a, b) = 0$$

zwischen den beiden Parametern hinzu, so wird damit aus (2) ein einfach unendliches System von Ebenen ausgelöst, dessen Einhüllende eine developpable Fläche ist; in der allgemeinen Lösung der Clairaut'schen Gleichung sind also lauter developpable Flächen enthalten.

Die etwa vorhandene singuläre Lösung erhält man durch Elimination von a, b zwischen den Gleichungen

$$z = ax + by + f(a, b), \qquad 0 = x + \frac{\partial f}{\partial a}, \qquad 0 = y + \frac{\partial f}{\partial b}.$$

Die verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung ist der analytische Ausdruck für ein Problem, das eine Fläche zu bestimmen verlangt aus einer Eigenschaft ihrer Tangentialebene, die von der Lage des Berührungspunktes in der Ebene unabhängig und daher von allen ihren Punkten gleichmässig erfüllt ist. Bringt man nämlich die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $x/y/z$ der unbekannten Fläche

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

auf die Form

$$\zeta = p\xi + q\eta + z - px - qy, \tag{3}$$

so bestimmt der Ausdruck $z - px - qy$ den Abschnitt der Ebene auf der z-Axe; hiernach hängt dieser Abschnitt im Allgemeinen von x, y, p und q ab; soll er von der Lage des Berührungspunktes in der Ebene unabhängig sein, so muss er sich auf eine Function $f(p, q)$ von p und q allein reduciren, sodass

$$z - px - qy = f(p, q)$$

wird. Dies aber ist die Clairaut'sche Gleichung, nur mit veränderter Anordnung ihrer Glieder.

Wird nach der Fläche gefragt, deren Tangentialebenen vom Ursprunge um eine gegebene Strecke r entfernt sind, so führt dies auf eine Clairaut'sche Gleichung, weil von der Lage des Berührungspunktes in dem Probleme nicht gesprochen wird. In der That, die Ebene (3) hat vom Ursprunge den Abstand

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

folglich ist

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = r$$

oder

$$z = px + qy + r\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \tag{4}$$

die Differentialgleichung der gesuchten Fläche.

Diese selbst ist die mit dem Halbmesser r um den Ursprung beschriebene Kugel und bildet die *singuläre* Lösung von (4), während die zweifach unendliche Gesammtheit ihrer Tangentialebenen

$$z = ax + by + r\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

eine *vollständige* Lösung ausmacht. Jede andere — *allgemeine* — Lösung besteht in einer der Kugel umschriebenen Developpabeln (**209**).

Es liege zur Lösung die Clairaut'sche Gleichung

$$z = px + qy + 3\sqrt[3]{kpq}$$

vor. Aus ihrer vollständigen Lösung

$$z = ax + by + 3\sqrt[3]{kab}$$

ergibt sich durch Elimination von a, b mit Zuhilfenahme der Gleichungen

$$0 = x + \frac{kb}{\sqrt[3]{k^2a^2b^2}}$$

$$0 = y + \frac{ka}{\sqrt[3]{k^2a^2b^2}}$$

die singuläre Lösung

$$xyz = k.$$

Jede Relation, die man zwischen a, b aufstellt, führt zu einem besondern Falle der allgemeinen Lösung; so hat man, um die der Annahme

$$ab = k^2$$

entsprechende Lösung zu finden, zwischen den Gleichungen

$$z = ax + \frac{k^2}{a}y + 3k$$

$$0 = x - \frac{k^2}{a^2}y$$

a zu eliminiren und erhält als Resultat

$$(z - 3k)^2 = 4k^2xy,$$

die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung mit der Spitze $0/0/3k$ (**357**, 2)).

4) Lässt eine Differentialgleichung sich in die Form

$$\varphi(x, p) = \psi(y, q) \tag{1}$$

bringen, dann gelangt man zu einer vollständigen Lösung dadurch, dass man die beiden Theile von (1) einer willkürlichen Constanten a gleichsetzt und bezüglich p und q auflöst; man findet so

$$p = \varphi_1(x, a), \qquad q = \psi_1(y, a)$$

und hiermit wird

$$dz = \varphi_1(x, a)dx + \psi_1(y, a)dy$$

zu einer exacten Gleichung, deren Integral

$$z = \int \varphi_1(x, a)dx + \int \psi_1(y, a)dy + b \tag{2}$$

ist.

Ein Beispiel hierzu bietet die Gleichung

$$p^2 + q^2 = x + y;$$

als vollständige Lösung ergibt sich laut (2)

$$z = \int \sqrt{x + a}\, dx + \int \sqrt{y - a}\, dy + b,$$

d. i.

$$z = \frac{2}{3}(x + a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y - a)^{\frac{3}{2}} + b.$$

361. Die allgemeine von **Lagrange** und **Charpit** herrührende Methode der Integration einer nichtlinearen Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

geht darauf aus, eine zweite Gleichung zwischen x, y, z, p, q und einer willkürlichen Constanten a:

$$f(x, y, z, p, q) = a \tag{2}$$

zu finden derart, dass die aus (1) und (2) resultirenden Bestimmungen für p, q (im Allgemeinen Functionen von x, y, z, a)

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{3}$$

zu einer exacten Gleichung (310) machen. Die hiefür nothwendige Bedingung besteht darin, dass p vollständig nach y differentiirt dasselbe Resultat ergibt, wie die vollständige Differentiation von q nach x, d. h. dass

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

oder, wenn man für $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ wieder die Zeichen p, q gebraucht, dass

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p. \tag{4}$$

Um diese Bedingungen auszuführen, differentiire man (1), (2) unter dem Gesichtspunkte, dass p, q Functionen von x, y, z sind, nach x, und man erhält

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0;$$

daraus resultirt, wenn man sich zur Bezeichnung der Functionaldeterminanten der in 275 erwähnten Donkin'schen Schreibweise bedient,

$$\frac{\partial(F, f)}{\partial(x, p)} + \frac{\partial(F, f)}{\partial(q, p)}\frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Die Differentiation von (1), (2) nach y gibt

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

und daraus resultirt

$$\frac{\partial(F, f)}{\partial(y, q)} + \frac{\partial(F, f)}{\partial(p, q)}\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Die Differentiation von (1), (2) nach z endlich liefert

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

und daraus folgert man

$$\frac{\partial(F, f)}{\partial(z, q)} + \frac{\partial(F, f)}{\partial(p, q)}\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial(F, f)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(F, f)}{\partial(q, p)}\frac{\partial q}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Die Einsetzung der aus (5), (6), (7), (8) gezogenen Werte für $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial z}$ in die Bedingungsgleichung (4) gibt zunächst folgendes Resultat:

$$\frac{\partial(F, f)}{\partial(x, p)} + \frac{\partial(F, f)}{\partial(y, q)} + \frac{\partial(F, f)}{\partial(z, p)}p + \frac{\partial(F, f)}{\partial(z, q)}q = 0.$$

Entwickelt man die Functionaldeterminanten, ordnet nach den Ableitungen der unbekannten Function f und bedient sich zur Bezeichnung der Differentialquotienten der gegebenen Function $F(x, y, z, p, q)$ der Abkürzungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q,$$

so gelangt man zu der Gleichung

$$(9)\quad \begin{cases} P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial f}{\partial z} \\ -(X + pZ)\frac{\partial f}{\partial p} - (Y + qZ)\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

aus welcher f zu bestimmen ist. Hiernach hängt diese Bestimmung (356) von einer homogenen linearen Differentialgleichung ab, die wiederum auf die Integration des Systems simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(10)\quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ}$$

zurückführt.

Ein Integral dieses Systems und damit auch ein Integral der Gleichung (9) ist bekannt: es ist die Function $F(x, y, z, p, q)$. In der That, setzt man in (9) statt der Ableitungen von f jene von F ein, so wird sie identisch befriedigt, da

$$PX + QY + (Pp + Qq)Z - (X + pZ)P - (Y + qZ)Q \equiv 0$$

ist.

Hat man ein zweites davon verschiedenes Integral des Systems (10) gefunden, so kommt es nur mehr auf die Integration der exacten Gleichung (3) an.

In den besonderen Fällen, welche den Gegenstand des vorigen Artikels gebildet haben, führt die allgemeine Methode ebenfalls zum Ziele und bestätigt die dort auf Grund geometrischer Überlegung gemachten Aufstellungen.

So ist bei der Differentialgleichung $F(p, q) = 0$

$$X = Y = Z = 0,$$

infolge dessen geben die beiden letzten Theile der Hilfsgleichungen

$$dp = 0, \quad dq = 0, \quad \text{woraus} \quad p = a, \quad q = b,$$

wozu jedoch die weitere nothwendige Bedingung $F(a, b) = 0$ hinzutritt.

Die Differentialgleichung $F(x, p, q) = 0$ gibt

$$Y = 0, \quad Z = 0,$$

infolge dessen ist vermöge (10)

$$dq = 0, \quad \text{woraus} \quad q = a.$$

Des weiteren gibt $F(y, p, q) = 0$

$$X = 0, \quad Z = 0,$$

daher ist auf Grund von (10)

$$dp = 0, \quad \text{woraus} \quad p = a.$$

Die nächste Form $F(z, p, q) = 0$ führt zu

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

womit die beiden letzten Theile von (10) sich vereinfachen zu

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \quad \text{woraus} \quad q = ap.$$

Die als letzte behandelte Gleichung $\varphi(x, p) - \psi(y, q) = 0$ ergibt

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Z = 0, \quad P = \frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

und hiermit verbinden sich der erste und vierte Theil von (10) zu der Gleichung

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial p}} = -\frac{dp}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

woraus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp = 0$$

und weiter

$$\varphi(x, p) = a$$

folgt.

362. *Beispiele.* 1) Zu der Differentialgleichung

$$px + qy - pq = 0$$

gehören die Hilfsgleichungen

$$\frac{dx}{x - q} = \frac{dy}{y - p} = -\frac{dz}{pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q},$$

aus deren zwei letzten Theilen sich

$$q = ap$$

ergibt. Dies mit der gegebenen Gleichung verbunden gibt (mit Ausserachtlassung von $p = 0$)

$$p = \frac{x}{a} + y, \qquad q = x + ay$$

und hiermit wird

$$dz = \left(\frac{x}{a} + y\right) dx + (x + ay) dy,$$

also

$$a\,dz = (x + ay)(dx + a\,dy),$$

woraus durch Integration die vollständige Lösung

$$2az = (x + ay)^2 + b$$

erhalten wird; sie stellt ein zweifach unendliches System zur xy-Ebene paralleler parabolischer Cylinder dar.

2) Die Differentialgleichung

$$(qy + z)^2 - p = 0$$

führt zu den Hilfsgleichungen

$$-dx = \frac{dy}{2y(qy+z)} = \frac{dz}{-p + 2qy(qy+z)} = \frac{dp}{-2p(qy+z)}$$
$$= \frac{dq}{-4q(qy+z)};$$

die Verbindung des zweiten Theiles mit dem letzten reducirt sich auf die exacte Gleichung

$$\frac{2dy}{y} + \frac{dq}{q} = 0,$$

deren Integral in der Gestalt

$$q = \frac{a}{y^2}$$

geschrieben werden kann; hiermit aber gibt die vorgelegte Gleichung

$$p = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2.$$

Die Einsetzung dieser Werte in $dz = p\,dx + q\,dy$ liefert zunächst

$$dz = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2 dx + \frac{a}{y^2}\,dy$$

und nach Trennung der exacten Theile

$$dz - \frac{a}{y^2}\,dy = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2 dx;$$

beachtet man aber, dass die linke Seite das exacte Differential von $\frac{a}{y} + z$ ist, so kann für die letzte Gleichung auch geschrieben werden

$$\frac{d\left[\frac{a}{y} + z\right]}{\left[\frac{a}{y} + z\right]^2} = dx$$

und das Integral hiervon gibt die vollständige Lösung

$$z + \frac{1}{x+b} + \frac{a}{y} = 0.$$

§ 2. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

363. War es bei den Differentialgleichungen erster Ordnung möglich, über die Zusammensetzung ihrer Integrale Aufschluss zu erlangen und allgemeine Methoden zu ihrer Integration zu entwickeln, so ist solches bei Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bisher nicht gelungen; nur einzelne specielle Formen sind mit besonderen Hilfsmitteln gelöst worden, darunter solche, zu welchen Probleme der Geometrie, Mechanik und Physik geführt haben.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln ist im Allgemeinen eine Relation zwischen acht Grössen: den drei Variabeln x, y, z und den fünf Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung p, q; r, s, t von z; ihr Ausdruck ist also

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{1}$$

Gelingt es auf irgend einem Wege, aus ihr eine Gleichung abzuleiten, welche r, s, t nicht enthält, also eine Gleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{2}$$

so ist die weitere Lösung auf ein bereits behandeltes Problem, auf die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung, zurückgeführt. Die Gleichung (2) wird ein *Zwischenintegral* der Gleichung (1) genannt.

In den beiden folgenden Artikeln wird eine Auswahl solcher Gleichungen vorgeführt werden, um daran einige Verfahrungsarten zu zeigen und die Mannigfaltigkeit in dem Baue der Integrale zur Anschauung zu bringen. Während in dem ersten Artikel vornehmlich solche Gleichungen zur Behandlung kommen, welche nur Differentialquotienten in Bezug auf *eine* unabhängige Variable enthalten, betrifft der zweite Artikel eine besondere Gattung: lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

364. *Beispiele.* 1) Die Differentialgleichung

$$(1) \qquad r = f(x)$$

ist wie eine gewöhnliche zu behandeln, jedoch mit der Bemerkung, dass an die Stelle der Integrations*constanten* eine willkürliche Function von y, das bei dem ganzen Processe als constant betrachtet wird, zu setzen ist, um das Integral in seiner grössten Allgemeinheit zu erhalten. Hiernach ist nach einmaliger Integration

$$p = \int f(x)dx + \varphi(y)$$

— dies das Zwischenintegral — und nach abermaliger Integration

$$(2) \qquad z = \int dx \int f(x)dx + x\varphi(y) + \psi(y).$$

In ähnlicher Weise wäre $t = f(y)$ zu lösen.

2) Ein analoger Vorgang führt zur Lösung von

$$(3) \qquad s = f(x, y),$$

nur mit dem Unterschiede, dass nach zwei verschiedenen Variabeln integrirt wird; man erhält bei der Integrationsfolge y, x

$$(4) \qquad \begin{cases} p = \int f(x, y)dy + \varphi'(x) \\ z = \int dx \int f(x, y)dy + \varphi(x) + \psi(y). \end{cases}$$

3) Die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} r + Pp = Q \\ t + Qq = R \\ s + Pp = Q, \end{cases}$$

worin P, Q, R Functionen von x, y bedeuten, erscheinen, in den Formen

$$\frac{dp}{dx} + Pp = Q$$

$$\frac{dq}{dy} + Qq = R$$

$$\frac{dp}{dy} + Pp = Q$$

geschrieben, als gewöhnliche lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, sofern man in der ersten y, in den beiden letzten x als constant auffasst. Ihre Integration nach der in

814 entwickelten Methode führt zu einem Zwischenintegrale, das wieder als gewöhnliche Differentialgleichung anzusehen ist.

Ein Beispiel zu dem ersten Falle bietet die Gleichung

$$xr - p = xy;$$

transformirt man sie zu

$$\frac{dp}{dx} - \frac{p}{x} = y,$$

so gibt sie zunächst

$$p = x\{\chi(y) + y\,l.x\}$$

und nach nochmaliger Integration

$$z = \frac{x^2}{2}\chi(y) + y\left(\frac{x^2}{2}l.x - \frac{x^2}{4}\right) + \psi(y);$$

die beiden Glieder $\frac{x^2}{2}\chi(y) - \frac{x^2 y}{4}$ ziehen sich aber zu $x^2\varphi(y)$ zusammen, wobei $\varphi(y)$ wieder eine willkürliche Function von y bedeutet, sodass endgiltig

$$z = \frac{x^2 y}{2} l.x + x^2\varphi(y) + \psi(y).$$

4) Sind P, Q, R Functionen von x, y, p, so kann die Gleichung

$$Pr + Qs = R \tag{6}$$

als lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung behandelt werden; man braucht sie nur in der Gestalt

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial p}{\partial y} = R$$

zu schreiben; ihre Integration ist also zunächst auf die Integration der beiden simultanen Gleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dp}{R}$$

zurückgeführt; das Zwischenintegral, welches sich so ergibt, verhält sich wie eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Als Beispiel hierzu diene die Gleichung.

$$p + r + s = 1;$$

die zugehörigen Hilfsgleichungen

$$dx = dy = \frac{dp}{1-p}$$

ergeben die beiden unabhängigen Lösungen

$$x - y = a, \qquad 1 - p = be^{-y}$$

und aus diesen folgt das allgemeine Integral

$$\frac{1 - p}{e^{-y}} = \varphi'(x - y)$$

oder

$$p = 1 - e^{-y}\varphi'(x - y),$$

woraus schliesslich

$$z = x - e^{-y}\varphi(x - y) + \psi(y).$$

5) Bei der Differentialgleichung

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0, \tag{7}$$

welche alle fünf Differentialquotienten enthält, kann von dem folgenden auch in einigen anderen Fällen zum Ziele führenden Verfahren Gebrauch gemacht werden.

Mit Hilfe der Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy$$
$$dq = s\,dx + t\,dy$$

lassen sich nämlich aus (7) r und t ausscheiden, indem man darin

$$r = \frac{dp - s\,dy}{dx}, \qquad t = \frac{dq - s\,dx}{dy}$$

einsetzt, die umgestaltete Gleichung lautet dann

$$q^2 dp\,dy + p^2 dq\,dx = s(q\,dy + p\,dx)^2,$$

enthält nur einen zweiten Differentialquotienten und wird befriedigt, wenn simultan

$$q^2 dp\,dy + p^2 dq\,dx = 0$$
$$q\,dy + p\,dx = 0$$

ist; die erste Gleichung vereinfacht sich aber vermöge der zweiten, sodass man schliesslich das Gleichungspaar

$$q\,dp - p\,dq = 0$$
$$q\,dy + p\,dx = 0$$

zu integriren hat; die erste Gleichung gibt

$$\frac{p}{q} = a,$$

die zweite, weil ihre linke Seite dz darstellt,

$$z = b;$$

das allgemeine Integral lautet also

$$\frac{p}{q} = \varphi(z)$$

und bildet in der Anordnung

$$p - \varphi(z)q = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung, welche mittels der Hilfsgleichungen

$$dx = -\frac{dy}{\varphi(z)} = \frac{dz}{0}$$

zu lösen ist. Zunächst folgt daraus

$$z = C$$

und hiermit weiter

$$y + x\varphi(C) = C';$$

schliesslich also ergibt sich die allgemeinste Lösung, wenn man $C' = \psi(C)$ setzt, d. h.

$$y + x\varphi(z) = \psi(z).$$

365. Besondere Beachtung verdienen wegen ihres Auftretens in den Anwendungen der Analysis diejenigen Gleichungen, welche in Bezug auf z und seine Differentialquotienten p, q, r, s, t, ... linear sind in dem Sinne, dass die Coefficienten nurmehr von x, y abhängen, und unter diesen insbesondere die *homogenen* Gleichungen mit *constanten Coefficienten.*

Gleichungen der angegebenen Art haben mit den gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen (336) mancherlei Analogien. So hat eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad a_0 z + 2b_0 p + 2b_1 q + c_0 r + 2c_1 s + c_2 t = 0,$$

also eine homogene Differentialgleichung, gleichgiltig ob die Coefficienten a_0, b_0, b_1, ... constant oder Functionen von x, y sind, die Eigenschaft, dass, sobald sie durch

$$z = \varphi(x, y)$$

befriedigt wird, auch $z = C\varphi(x, y)$ ein Integral derselben ist; und weiter, wenn $z = \varphi_1(x, y)$, $z = \varphi_2(x, y)$ zwei Integrale jener Gleichung vorstellen, so ist auch der mit willkürlichen Constanten C_1, C_2 gebildete Ausdruck

$$z = C_1\varphi_1(x, y) + C_2\varphi_2(x, y)$$

ein Integral; diese Bemerkung, von deren Richtigkeit man sich ebenso leicht wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen über-

zeugt, ist wichtig für die Construction des allgemeinsten Integrals.

Wir setzen nun die Coefficienten der Gleichung (1) als *constant* voraus. Führt man in die linke Seite derselben den mit vorläufig unbestimmten Zahlen α, β gebildeten Ausdruck

$$(2) \qquad z = e^{\alpha x + \beta y}$$

ein, so verwandelt sie sich in das Product

$$e^{\alpha x + \beta y}[a_0 + 2b_0\alpha + 2b_1\beta + c_0\alpha^2 + 2c_1\alpha\beta + c_2\beta^2];$$

mithin ist (2) nur dann, dann aber immer ein Integral von (1), wenn α, β der quadratischen Gleichung

$$(3) \qquad a_0 + 2b_0\alpha + 2b_1\beta + c_0\alpha^2 + 2c_1\alpha\beta + c_2\beta^2 = 0$$

genügen. Ist also α_k, β_k eine Lösung dieser *charakteristischen* Gleichung, so ist

$$C_k e^{\alpha_k x + \beta_k y}$$

ein Integral, und das allgemeinste Integral ist

$$(4) \qquad z = \sum C_k e^{\alpha_k x + \beta_k y},$$

die Summe eigentlich über die ∞^1 Wertverbindungen α_k/β^k erstreckt, welche der Gleichung (3) entsprechen.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo die linke Seite von (3) Zerlegung in lineare Factoren gestattet, sodass

$$(A_1\alpha + B_1\beta + C_1)(A_2\alpha + B_2\beta + C_2) = 0$$

ist. Zieht man daraus die beiden Bestimmungen

$$\beta = m\alpha + n, \qquad \beta = m'\alpha + n',$$

so zerfällt (4) in zwei Theile

$$z = e^{ny}\sum C e^{(x+my)\alpha} + e^{n'y}\sum C' e^{(x+m'y)\alpha},$$

die Summe über alle reellen Werte von α erstreckt und jedem α ein beliebiges C zugeordnet. Die erste Summe aber stellt in letzter Linie eine willkürliche Function von $x + my$, die zweite eine willkürliche Function von $x + m'y$ dar; man hat also bei dieser Voraussetzung

$$(5) \qquad z = e^{ny}\varphi(x + my) + e^{n'y}\psi(x + m'y)$$

als allgemeinstes Integral von (1).

Zur Illustration dieses Verfahrens mögen zwei *Beispiele* dienen, deren erstes insofern von historischem Interesse ist, als es die erste partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung betrifft, die zur Lösung gebracht wurde — durch Euler —; das zweite ist ein blosser Specialfall des ersten und behandelt eine Differentialgleichung, die in der Theorie schwingender Saiten auftritt.

1) Zu der Gleichung

$$r + 2as + bt = 0 \tag{6}$$

gehört die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + 2a\alpha\beta + b\beta^2 = 0;$$

dieselbe ergibt für das Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ zwei Werte: m und m', sodass

$$\beta = m\alpha \quad \text{und} \quad \beta = m'\alpha$$

zu setzen ist; hiernach ist

$$z = \varphi(x + my) + \psi(x + m'y) \tag{7}$$

das allgemeine Integral von (6).

2) Die Gleichung

$$r - a^2 t = 0 \tag{8}$$

ist in der vorigen als besonderer Fall enthalten, hat die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 - a^2\beta^2 = 0$$

mit den Lösungen $\beta = \pm \frac{\alpha}{a}$, also das allgemeine Integral $z = \varphi\left(x + \frac{y}{a}\right) + \psi\left(x - \frac{y}{a}\right)$ oder, was auf dasselbe zurückkommt,

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax). \tag{9}$$

Sind ausreichende Bedingungen hiefür vorhanden, so lassen sich auch die willkürlichen Functionen bestimmen. Würde z. B. gefordert, dass

$$\text{für } x = 0 \qquad z = F(y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f(y)$$

werden soll, wobei F, f *gegebene* Functionen bedeuten, so hätte man in Ausführung dieser Bedingungen

$$\varphi(y) + \psi(y) = F(y)$$
$$a\varphi'(y) - a\psi'(y) = f(y),$$

folglich weiter

$$\varphi(y) + \psi(y) = F(y)$$
$$\varphi(y) - \psi(y) = F_1(y),$$

wenn $\frac{1}{a}\int f(y)dy = F_1(y)$ gesetzt wird, und hieraus

$$\varphi(y) = \frac{F(y) + F_1(y)}{2}$$

$$\psi(y) = \frac{F(y) - F_1(y)}{2};$$

unter den festgesetzten Bedingungen hätte man also

$$z = \frac{F(y + ax) + F(y - ax)}{2} + \frac{F_1(y + ax) - F_1(y - ax)}{2}$$

als einen besonderen Fall des in (9) enthaltenen allgemeinsten Integrals.

Sachregister.

[Die römischen Ziffern bezeichnen den Band, die arabischen die Seite.]